Höhere Mathematik II

Lösungen zum 4. Übungsblatt

(1) Es sei V ein Vektorraum, V_1, V_2 Teilräume von V.

a) $V_1 \cap V_2$ ist ebenfalls ein Teilraum von V, denn:
Sind $x_1, x_2 \in V_1 \cap V_2$, also $x_1, x_2 \in V_1$ und $x_1, x_2 \in V_2$,
und α_1, α_2 Skalare, so ist $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in V_1$
und $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in V_2$, und somit $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in V_1 \cap V_2$.
Die restlichen Vektorraumeigenschaften werden vom Vektorraum V geerbt.

b) Gegenbeispiel im $\mathbb{R}^2$: Wir betrachten die durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Teilräume des $\mathbb{R}^2$,
also
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{sowie}$$
$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Nun ist $V_1 \cup V_2$ kein Vektorraum, denn in $V_1 \cup V_2$ liegen zwar die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, aber nicht der Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

c) $V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$.

Es ist $V_1 + V_2 \subseteq V$. Es sei $x_1 = v_1 + v_2$ und
$x_2 = v_3 + v_4 \in V_1 + V_2$ mit $v_1, v_3 \in V_1$ und $v_2, v_4 \in V_2$.
Weiter seien α_1, α_2 Skalare.
Dann ist $\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 = \alpha_1 (v_1 + v_2) + \alpha_2 (v_3 + v_4)$
$$= \underbrace{(\underbrace{\alpha_1 v_1}_{\in V_1} + \underbrace{\alpha_2 v_3}_{\in V_1})}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_4)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2 .$$

Die restlichen Vektorraumeigenschaften werden wieder vom Vektorraum V geerbt.

(2) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $P_n(\mathbb{R})$ bezeichne den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Weiter seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Zahlen.

Eine Basis von $P_n(\mathbb{R})$ ist z.B. durch die Polynome $1, x, x^2, \dots, x^n$ gegeben.

a) Wir zeigen, dass die Polynome

$$I_\ell(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq\ell}}^{n} (x - x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq\ell}}^{n} (x_\ell - x_k)}$$

$$= \frac{\overbrace{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{\ell-1})\cdot(x-x_{\ell+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}^{\text{Polynom vom Grad } n}}{\underbrace{\underbrace{(x_\ell-x_0)}_{\neq 0}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x_\ell-x_{\ell-1})}_{\neq 0}\cdot\underbrace{(x_\ell-x_{\ell-1})}_{\neq 0}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x_\ell-x_n)}_{\neq 0}}_{\in \mathbb{R}}}$$

mit $\ell = 0, 1, \dots, n$ in $P_n(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind.
Da $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$ gilt, bilden die Polynome $I_0, \dots, I_n$ dann ebenfalls eine Basis.

Es seien $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 I_0 + \ldots + \lambda_n I_n = 0$.
Insbesondere gilt dann $\lambda_0 I_0(x_\ell) + \ldots + \lambda_n I_n(x_\ell) = 0$ für alle $\ell = 0, 1, \dots, n$.
Wegen $I_j(x_\ell) = \delta_{j\ell}$ für $j, \ell = 0, 1, \dots, n$ gilt nun:

$$\lambda_0 I_0(x_\ell) + \ldots + \lambda_n I_n(x_\ell) = \lambda_\ell \underbrace{I_\ell(x_\ell)}_{=1} = \lambda_\ell = 0$$

für $\ell = 0, 1, \dots, n$.
Also sind die Polynome $I_0, \dots, I_n$ linear unabhängig.

b) Es sei U_m die Menge der Polynome $p \in P_n(\mathbb{R})$, für die $p^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, m$ gilt.

Die Menge U_m bildet einen Teilraum von $P_n(\mathbb{R})$, denn:
Sind $p_1, p_2 \in U_m$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so gilt
$(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)^{(j)}(0) = \alpha_1 p_1^{(j)}(0) + \alpha_2 p_2^{(j)}(0) = 0$
für $j = 0, 1, \ldots, m$.

Es sei nun $p \in U_m$. Nach dem Satz von Taylor läßt sich p wie folgt schreiben:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{p^{(n+1)}(\xi)}_{=0} x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) x^k .$$

Da $p \in U_m$ ist, gilt $p(x) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) x^k$.

Und da dies für jedes $p \in U_m$ gilt, bilden die Polynome $x^{m+1}, \ldots, x^n$ eine Basis von U_m.
Also ist $\dim U_m = n - m$.

(3)

Es sei $D: P_4(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ durch

$$Dp = p' \quad (p \in P_4(\mathbb{R})) \quad \text{gegeben.}$$

a) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q \in P_4(\mathbb{R})$. Dann ist

$$D(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)' = \alpha p' + \beta q'$$
$$= \alpha D(p) + \beta D(q).$$

b) Es ist $P_4(\mathbb{R}) = \mathrm{Lin}(1, t, t^2, t^3, t^4)$ und
$$P_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Lin}(1, t, t^2, t^3).$$

Wir möchten die lineare Abbildung $D: P_4(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ bzgl. der Standardbasen angeben.

Es gilt mit $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t^3$, $p_4(t) = t^4$, das folgende.

$$(Dp_0)(t) = 0, \quad (Dp_1)(t) = 1, \quad (Dp_2)(t) = 2t, \qquad (*)$$
$$(Dp_3)(t) = 3t^2, \quad (Dp_4)(t) = 4t^3,$$

also

$$Dp_0 = 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$
$$Dp_1 = 1 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$
$$Dp_2 = 0 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$
$$Dp_3 = 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$
$$Dp_4 = 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 4 \cdot p_3$$

$\rightsquigarrow$ Zugehörige Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp.: $p \in P_4(\mathbb{R})$: $\quad p = 2 + t + 3t^3 + 4t^4 \quad \hat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} =: x_p$

$$\mathcal{D}p = 1 + 9t^2 + 16t^3$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= A x_p$$

c) Aus (*) liest man ab

$$\operatorname{Kern} \mathcal{D} = \operatorname{Lin}(p_0) = \{ p \in P_4(\mathbb{R}) : p(t) = c \ (t \in \mathbb{R}) \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \}$$

$$\operatorname{Bild} \mathcal{D} = \operatorname{Lin}(p_0, 2p_1, 3p_2, 4p_3)$$
$$= \operatorname{Lin}(p_0, p_1, p_2, p_3) = P_3(\mathbb{R}),$$

und wir erhalten

$$\dim P_4(\mathbb{R}) = 5 = 1 + 4 = \dim \operatorname{Kern} D + \dim P_3(\mathbb{R})$$
$$= \dim \operatorname{Kern} D + \dim \operatorname{Bild} D .$$

d) Es sei $p \in P_3(\mathbb{R})$, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (t \in \mathbb{R})$.

Dann ist

$$(Ip)(t) = \int_0^t a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \, dx$$
$$= \left[a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 \right]_0^t$$
$$= a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \frac{a_3}{4} t^4 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Damit gilt $(D \circ I)[p](t) = D((Ip)(t))$

$$= D\left(a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4\right)(t)$$
$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$= p(t) .$$

Also $(D \circ I)(p) = p$ und somit $D \circ I = \mathrm{Id}_{P_3(\mathbb{R})}$.

Betrachtet man z.B. das Polynom $p(t) = 5 \quad (t \in \mathbb{R})$,
so ist $Dp = 0$, und wegen

$$I(Dp)(t) = I(0)(t) = \int_0^t 0 \, dx = 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ist

$$(I \circ D)(p) \neq p = \mathrm{Id}_{P_4(\mathbb{R})}(p) .$$

(4) Es sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Dann ist $x^T \cdot x = (1, \dots, n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

$$= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2,$$

und $x \cdot x^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \cdot (1, \dots, n)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ \vdots & & & \\ n & 2n & & n \cdot n \end{pmatrix}$$

„Einmaleins-Matrix".

(5) Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1$, und die Matrix $A = (\alpha_k \overline{\alpha_l})_{k,l = 1,\dots,n}$ gegeben.

Wir betrachten zunächst die Komponenten der Matrix A^2.

Es gilt

$$(A^2)_{js} = (AA)_{js} = \sum_{k=1}^{n} (A_{jk})(A_{ks})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \alpha_k \overline{\alpha_s} = \alpha_j \overline{\alpha_s} \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \alpha_k$$
$$= \alpha_j \overline{\alpha_s} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \alpha_j \overline{\alpha_s} = (A)_{js}$$

für alle $j, s = 1, \dots, n$.

Folglich ist $A^2 = A$, und damit ergibt sich $A^m = A$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(6) Die Summe $A+C$ ist nicht definiert, denn die Spaltenanzahl der beiden Summanden stimmt nicht überein.
Auch das Produkt CB ist nicht definiert, denn bei Matrixprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein.
Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen.

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad 3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix},$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix},$$

$$A^* C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-i \\ -3i & 1 & 4 \\ -1 & 1+i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4-2i \\ 12 & 8-i \\ -5 & -5-i \end{pmatrix}$$

und

$$C^T B = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+i & 6 & 2+3i \\ -i & 6+i & -2i \end{pmatrix}$$

7 Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ werden wir jeweils definieren, indem wir ihre Zeilen, die wir mit $\vec{x}_1^T, \dots, \vec{x}_m^T$ bezeichnen, angeben.

Im folgenden brauchen wir ständig: Für jede Matrix $D \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ist $\vec{e}_j^T D$ die j-te Zeile von D, wenn $\vec{e}_j$ der j-te Einheitsvektor von $\mathbb{C}^m$ ist.

Z1: Multiplizieren von Zeile j mit $\alpha \neq 0$.

Es soll also gelten: $\vec{e}_j^T B A = \alpha (\vec{e}_j^T A)$ und $\vec{e}_k^T BA = \vec{e}_k^T A$ für $k \neq j$, d.h.

$\vec{x}_j^T A = \alpha (\vec{e}_j^T A)$ und $\vec{x}_k^T A = \vec{e}_k^T A$ für $k \neq j$.

Dies ist offenbar für $\vec{x}_j^T = \alpha \vec{e}_j^T$ und $\vec{x}_k^T = \vec{e}_k^T$ $(k \neq j)$ erfüllt.

(„Multiplikationsmatrix").

Z2: Addieren des α-fachen von Zeile k zu Zeile j, wobei $k \neq j$.

Hier soll $\vec{x}_j^T A = \vec{e}_j^T B A = \vec{e}_j^T A + \alpha (\vec{e}_k^T A)$ und $\vec{x}_s^T A = \vec{e}_s^T BA = \vec{e}_s^T A$ für $s \neq j$ gelten.

Dies erreichen wir mit

$$\vec{x}_j^T = \vec{e}_j^T + \alpha \vec{e}_k^T \quad \text{und} \quad \vec{x}_s^T = \vec{e}_s^T \quad \text{für } s \neq j.$$

(„Additionsmatrix")

Z3: Vertauschen von Zeile j und k.

Dabei soll $\vec{x}_j^T A = \vec{e}_j^T B A = \vec{e}_k^T A$ und

$\vec{x}_k^T A = \vec{e}_k^T BA = \vec{e}_j^T A$ sowie

$\vec{x}_s^T A = \vec{e}_s^T BA = \vec{e}_s^T A$ für $s \neq j, k$ gelten.

Daher wählen wir $\vec{x_j}^T = \vec{e_k}^T$ und $\vec{x_k}^T = \vec{e_j}^T$ sowie $\vec{x_s}^T = \vec{e_s}^T$ für $s \neq j,k$.