UNIVERSITÄT KARLSRUHE 18.05.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

5.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (Ü)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Zeigen Sie, dass jedes homogene lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) mit m Gleichungen in n Variablen mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt.

Aufgabe 2 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist V ein (reeller oder komplexer) Vektorraum der Dimension n, so sind je $n+1$ Elemente von V linear abhängig.

Aufgabe 3 (Ü)
Es sei $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler (reeller oder komplexer) Vektorraum, $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_m \in V$ seien linear unabhängig.
Zeigen Sie: Entweder bilden $v_1, ..., v_m$ eine Basis von V oder es gibt Elemente $v_{m+1}, ..., v_n \in V$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n > m$), so dass $\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 4 (T)
Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit der vorkommenden Parameter) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (T)
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & -2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & -1 \end{array}$$

– bitte wenden –

Aufgabe 6 (T)
Berechnen Sie die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (T)
Es sei $\left\{\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^n$. Weiter seien $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \vec{e_k} \in \mathbb{C}^n$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{x}^{\top} A \vec{x}$. Was ergibt sich für $\vec{x}^{\top} A \vec{x}$, wenn die Matrix A schiefsymmetrisch ist, d.h. $A = -A^{\top}$ gilt?

Aufgabe 8 (Ü)
In einem Vektorraum V mit der Basis $B = \left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right\}$ sei durch

$$f(\vec{b_1}) = 2\,\vec{b_1} + 3\,\vec{b_3}, \quad f(\vec{b_2}) = -\,\vec{b_1} + 2\,\vec{b_2} - 4\,\vec{b_3}, \quad f(\vec{b_3}) = \vec{b_1} - 2\,\vec{b_2}$$

eine lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben.

a) Man bestimme die Abbildungsmatrix $A_{B,B}$ von f bezüglich B.

b) Durch

$$\vec{c_1} = \vec{b_1} + \vec{b_2} + \vec{b_3}, \quad \vec{c_2} = \vec{b_1} - \vec{b_2}, \quad \vec{c_3} = \vec{b_1} + \vec{b_3},$$

ist eine weitere Basis $C = \left\{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}\right\}$ von V gegeben. Stellen Sie die $\vec{b_j}$ durch die $\vec{c_k}$ dar, und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_{C,C}$ von f bezüglich C.

HINWEISE ZUR 1.ÜBUNGSKLAUSUR

Übungsklausur: Die erste Übungsklausur zur Vorlesung „Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie“ findet am Samstag, dem 2.6.2007, von 9.00 bis 11.00 Uhr statt.

Bitte beachten Sie folgende Hörsaaleinteilung:

Fachrichtung Elektroingenieurwesen	Gerthsen
Fachrichtung Geodäsie	Gerthsen
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben A bis K)	HMU
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben L bis Z)	HMO

Eine vorherige Anmeldung ist für diese Übungsklausur nicht erforderlich!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, dem 13. Juni 2007, im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am 14. Juni 2007 von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 33 beantwortet.