Höhere Mathematik II

Lösungen zum 5. Übungsblatt

(1). Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) mit m Gleichungen und n Variablen.

Dies läßt sich kurz schreiben als

$$Ax = 0 \qquad \text{mit} \quad A = (\alpha_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,n}} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$\text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n .$$

1. Schritt:

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k = 0 \qquad (j = 1, \dots, m)$$

oder

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{jk} \xi_k + \sum_{k=m+2}^{n} \alpha_{jk} \xi_k = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

Setzt man $\xi_{m+2} = \xi_{m+3} = \dots = \xi_n = 0$, dann bleibt

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{jk} \xi_k = 0 \qquad (j = 1, \dots, m)$$

zu lösen.

Wir zeigen, dass (2) eine nichttriviale Lösung $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{m+1} \end{pmatrix}$ besitzt.

Dann ist $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ eine nichttriviale Lösung von (1).

2. Schritt: (2) ist ein lineares Gleichungssystem der Art

$$Ax = 0 \quad \text{mit } A = (\alpha_{jk})_{jk} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \; x \in \mathbb{C}^n$$

mit $m = n-1$.

Wir zeigen, dass dies stets eine nichttriviale Lösung besitzt.

Gilt $\alpha_{jk} = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$ und $k = 1, \dots, n$, so ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ eine nichttriviale Lösung.

Sind nun nicht alle α_{jk} gleich 0, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha_{11} \neq 0$ gilt (ansonsten benenne man die Variablen um, tausche gegebenenfalls die Gleichungen).

Durch Subtraktion von Vielfachen der ersten Zeile von den folgenden Zeilen wird

$$\alpha_{21} = \alpha_{31} = \dots = \alpha_{n-1,1} = 0 \quad \text{erreicht.}$$

3. Schritt: Das System, das noch zu untersuchen ist, hat die folgende Form:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} z_1 + \alpha_{12} z_2 + \dots + \alpha_{1n} z_n = 0 \\ (4) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_{22} z_2 + \dots + \tilde{\alpha}_{2n} z_n = 0 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_{n-1,2} z_2 + \dots + \tilde{\alpha}_{n-1,n} z_n = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Zu zeigen bleibt nun, dass dieses System eine nichttriviale Lösung besitzt.

Dies geschieht man per Induktion über die Anzahl der Variablen.

Induktionsanfang: $n = 2$ Variablen, 1 Gleichung:

$$\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = 0$$

Ist $\alpha_{12} = 0$, so ist $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ Lösung.

Ist $\alpha_{12} \neq 0$, so ist $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{-\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\end{pmatrix}$ Lösung

Beide Lösungen sind offensichtlich nichttrivial.

Induktionsschritt: $n-1 \to n$

Zu zeigen ist, dass das System (3), das durch Äquivalenzumformungen aus dem System (2) hervorgegangen ist, eine nichttriviale Lösung besitzt.
Nach Induktionsvoraussetzung besitzt das System (4) eine nichttriviale Lösung ($n-2$ Gleichungen, $n-1$ Unbekannte).
Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung von (3) ein und löst nach ξ_1 auf, so erhält man eine nichttriviale Lösung von (3) bzw. (nach Rückumbenennung) von (2).

② Es sei V ein (reeller oder komplexer) Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\dim V = n$. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, wobei wir o.B.d.A. $V \neq \{0\}$ annehmen.

Beh.: Sind $x_1, \ldots, x_{n+1} \in V$, so sind $x_1, \ldots, x_{n+1}$ linear abhängig.

Beweis: Jedes x_k läßt sich schreiben als

$$(1) \qquad x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} v_j \qquad k = 1, \ldots, n+1 .$$

Wir zeigen nun, dass es $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \begin{smallmatrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{smallmatrix}$ gibt, so dass mindestens ein $\beta_k \neq 0$ ist und

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Setzt man (1) in (2) ein, so ergibt sich

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k \alpha_{kj} \right) v_j .$$

Wir müssen also zeigen, dass das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{kj} \beta_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

eine nichttriviale Lösung besitzt.
Da dies ein System von n Gleichungen mit $n+1$ Variablen ist, folgt dies aus Aufgabe 1.

(3) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $v_1, \ldots, v_m \in V$ linear unabhängig.

Gilt nun $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m) = V$, so ist nichts zu zeigen.
Andernfalls ist $U := \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m)$ ein echter Teilraum von V.
Insbesondere existiert damit ein $v_{m+1} \in V$ mit

$$v_{m+1} \in V \setminus U.$$

Damit sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_{m+1}$ linear unabhängig, denn sonst wäre $v_{m+1} \in \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m) = U$.

Setzt man das Verfahren fort, so erhält man linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$, wobei $n = \dim V$ ist, mit der Eigenschaft, dass

$$V = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n).$$

Das Verfahren bricht nämlich aufgrund von Aufgabe 2 (spätestens) bei v_n nach endlich vielen Schritten ab.

④ Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit z_1, z_2 und z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[z_2 \to -\frac{1}{2} z_2]{z_1 \to -\frac{1}{2} z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 \to z_3 - 4z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 \to z_3 + 6z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 \to -\frac{1}{3} z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[z_2 \to z_2 + 2z_3]{z_1 \to z_1 + \frac{7}{2} z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat die Matrix A den Rang 3.

Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[z_1 \leftrightarrow z_3]{z_3 \to \frac{1}{2} z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[j=2,3,4]{z_j \to z_j - z_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_2 \to -\frac{1}{2} z_2]{z_3 \to z_3 - 2z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 \to \frac{1}{2} z_3]{z_4 \to z_4 + z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \to z_1 - z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} =: \tilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Falle steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Falle den Rang 3.

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\tilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta-4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: in diesem Falle hat B den Rang 4.

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := \dfrac{\beta - 4}{\alpha - 10}$ und erhalten

$$\tilde{B} \xrightarrow{z_4 \to (\alpha-10)^{-1} z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{z_2 \to z_2 + z_4 \\ z_3 \to z_3 + 4z_4}]{z_1 \to z_1 - 6z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}.$$

(5) Wir schreiben die folgenden Gleichungssysteme der Einfachheit halber in eine erweiterte Matrixform um, und verwenden anschließend den Gaußalgorithmus zum Lösen.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -30 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{Lösung} \\ \text{des inhomogenen} \\ \text{Gleichungssystems}}} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{allg. Lösung} \\ \text{des homogenen} \\ \text{Systems}}} \quad (t \in \mathbb{R}) \right\}$$

b) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems}} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{allg. Lösung des homogenen Systems}} \quad (t, s \in \mathbb{R}) \right\}$$

(6)

Berechnung der inversen Matrix A mit Hilfe des Gaußalgorithmus :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Damit ist A^{-1} gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7)

Es sei $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^n$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Für $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k$ mit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \left(\sum_{l=1}^{n} z_l \vec{e}_l\right)^T A \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k\right)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{n} z_l \vec{e}_l^{\,T}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k A\vec{e}_k\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} z_l \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_l^{\,T} A \vec{e}_k\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_l z_k \underbrace{\vec{e}_l^{\,T} A \vec{e}_k}_{= a_{lk}} = \sum_{l,k=1}^{n} z_l z_k a_{lk} .$$

$= a_{lk}$, da $A\vec{e}_k = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\,\vec{e}_k$

$= \vec{a}_k$

und $\vec{e}_l^{\,T} A \vec{e}_k = \vec{e}_l^{\,T} \vec{a}_k$

$= a_{lk}$

Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^T$, so gilt wegen

$$(\vec{x}^T A \vec{x})^T = (A\vec{x})^T (\vec{x}^T)^T = \vec{x}^T A^T \vec{x}$$

$$\underset{A^T=-A}{=} -\vec{x}^T A \vec{x}$$

und $(\underbrace{\vec{x}^T A \vec{x}}_{\in \mathbb{C}})^T = \vec{x}^T A \vec{x}$, dass

$2\,\vec{x}^T A \vec{x} = 0$, also $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

8

a)

$$A_{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Es sei $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

Basiswechselmatrix von Basis C in die Basis B

$$T_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{b}_j$ darstellen als Linearkombinationen von $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$:

Ansatz: $\vec{b}_1 = x_1 \vec{c}_1 + x_2 \vec{c}_2 + x_3 \vec{c}_3$

führt auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Entsprechend für $\vec{b}_2, \vec{b}_3$.

Simultanes Lösen dieser 3 linearen Gleichungssysteme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-1 \quad -1}_{} & & 2 \end{array}\right)$$

Hier lassen sich x_1, x_2, x_3 ablesen

$$\rightsquigarrow \vec{b}_1 = \vec{c}_1 + \vec{c}_2 - \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_C$$

$$\vec{b}_2 = \vec{c}_1 - \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C$$

$$\vec{b}_3 = -\vec{c}_1 - \vec{c}_2 + 2\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_C$$

Basiswechselmatrix von Basis B in die Basis C

$$T_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = T^{-1}_{C\to B} .$$

Zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f(\vec{c}_1) &= f(\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = f(\vec{b}_1) + f(\vec{b}_2) + f(\vec{b}_3) \\ &= 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_3 - \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 4\vec{b}_3 + \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 \\ &= 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \\ &= 2(\vec{c}_1 + \vec{c}_2 - \vec{c}_3) - (-\vec{c}_1 - \vec{c}_2 + 2\vec{c}_3) \\ &= 3\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2 - 4\vec{c}_3 \end{aligned}$$

und $f(\vec{c_2}) = \ldots = -6\vec{c_1} - 4\vec{c_2} + 13\vec{c_3}$

$f(\vec{c_3}) = \ldots = -2\vec{c_1} + 5\vec{c_3}$.

Damit ist $A_{C,C}$ gegeben durch

$$A_{C,C} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -4 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

$A_{C,C}$ erhält man auch folgendermaßen:

$$A_{C,C} = \underbrace{T_{B\to C}}_{\text{Basiswechsel}} \circ \underbrace{A_{B,B}}_{f \text{ bzgl. Basis } B} \circ \underbrace{T_{C\to B}}_{\text{Basiswechsel}}$$

$$= T_{C\to B}^{-1} \cdot A_{B,B} \cdot T_{C\to B}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -4 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Dieses Verfahren ist allgemeingültig:

1. Basiswechselmatrizen berechnen
2. Matrixmultiplikation.