UNIVERSITÄT KARLSRUHE 25.05.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

6.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (T)

Es sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Rechnen Sie nach, dass gilt: $A^3 - 4A^2 + 3A = E$.

b) Bestimmen Sie mittels a) die Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $AA^{-1} = E$.

Aufgabe 2 (T)

Stellen Sie die Permutation π jeweils als Produkt von Transpositionen dar. Ist π gerade oder ungerade? Bestimmen Sie die Fehlstandszahl $f(\pi)$.

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (Ü)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 6 & 17 - \alpha & 2\alpha - 1 \\ -2 & \alpha + 9 & \alpha + 5 \\ -7 - \alpha & 2\alpha + 14 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\det A$ mit Hilfe der Sarrusschen Regel, und versuchen Sie, alle α zu bestimmen, für die die Matrix A singulär ist.

b) Berechnen Sie $\det A$ mittels Zeilen- und Spaltenumformungen, und geben Sie nun alle α an, für die die Matrix A invertierbar ist.

Aufgabe 4 (Ü)

Gegeben sei die Determinante

$$D_{n+1}(x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots .$$

a) Berechnen Sie $D_1(x)$, $D_2(x)$ und $D_3(x)$.

b) Leiten Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von $D_{n+1}(x)$ her. Geben Sie $D_{n+1}(x)$ explizit an; beweisen Sie Ihr Ergebnis mittels vollständiger Induktion.

c) Berechnen Sie alle $n \in \mathbb{N}_0$, für die die $(n+1) \times (n+1)-$Matrix

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 5 (Ü)
Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sei $A_n = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ eine $n \times n-$Matrix mit

$$\begin{cases} a_{jj} & = & jx & \text{für } 1 \leq j \leq n, \\ a_{j,j+1} & = & -j & \text{für } 1 \leq j \leq n-1, \\ a_{j+1,j} & = & j+1 & \text{für } 1 \leq j \leq n-1, \\ a_{jk} & = & 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $D_n(x) = \det A_n$ für $n = 2$ und $n = 3$.

b) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von $D_{n+1}(x)$ für $n \geq 3$.

c) Nun sei $x = 0$. Berechnen Sie $D_{n+1}(0)$ explizit für $n \geq 1$.

Aufgabe 6 (T)
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E_4)\vec{x} = \vec{0}$ auch nichttriviale Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für die in a) gefundenen Parameter jeweils alle Lösungen des Systems $(A - \lambda E_4)\vec{x} = \vec{0}$.

Aufgabe 7 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und die Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ seien regulär. Zeigen Sie:

a) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

b) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-2} A$.

c) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A$.

Aufgabe 8 (T)
Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}_\alpha$ durch

$$(\star) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} (\alpha-2)\cdot x & + & (\alpha-1)\cdot y & - & (\alpha-1)\cdot z & = & 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x & + & (\alpha^2-1)\cdot y & + & (\alpha-1)\cdot z & = & 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x & + & \alpha(\alpha-1)\cdot y & - & \alpha(\alpha-1)\cdot z & = & \alpha-1 \end{array} \right.$$

mit einem reellen Parameter α.

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Lösen Sie für diejenigen α, für welche $(\star)$ eindeutig lösbar ist, obiges Gleichungssystem mittels der Cramerschen Regel.

Aufgabe 9 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Die Determinante der Matrix

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

heißt Vandermondesche Determinante.

Zeigen Sie, dass $\det V_n = \prod\limits_{\substack{k\,<\,l \\ k,\,l\,=\,1,\,\ldots,\,n}} (x_l - x_k)$ gilt.

HINWEISE ZUR 1.ÜBUNGSKLAUSUR

Übungsklausur: Die erste Übungsklausur zur Vorlesung „Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie" findet am Samstag, dem 2.6.2007, von 9.00 bis 11.00 Uhr statt.

Bitte beachten Sie folgende Hörsaaleinteilung:

Fachrichtung Elektroingenieurwesen	Gerthsen
Fachrichtung Geodäsie	Gerthsen
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben A bis K)	HMU
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben L bis Z)	HMO

Eine vorherige Anmeldung ist für diese Übungsklausur nicht erforderlich!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, dem 13. Juni 2007, im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am 14. Juni 2007 von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 33 beantwortet.