Höhere Mathematik II

Lösungen zum 6. Übungsblatt

(1) a) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 9 \\ 27 & 10 & 22 \\ 12 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $A^3 - 4A^2 + 3A$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 9 \\ 27 & 10 & 22 \\ 12 & 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 4 & 12 \\ 36 & 12 & 28 \\ 12 & 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Setze $A^{-1} = A^2 - 4A + 3E$. Dann gilt

$$A A^{-1} = A(A^2 - 4A + 3E) = A^3 - 4A^2 + 3A \underset{a)}{=} E$$

Also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

a) Wir verwenden die Schreibweise $\pi_1 \xrightarrow{(ij)} \pi_2$ für $(ij) \circ \pi_1 = \pi_2$. (Dabei bezeichnet (ij) die Transposition, die i und j vertauscht.). Dann haben wir

$$\pi \xrightarrow{(13)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(25)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(35)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(45)} id.$$

Das bedeutet $(45) \circ (35) \circ (25) \circ (13) \circ \pi = id$,

also $\pi = (13) \circ (25) \circ (35) \circ (45)$.

Nun müssen wir noch $f(\pi)$ bestimmen, d.h. wir müssen feststellen, wieviele Paare (i,j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ vorkommen. Wir erhalten

$$(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4).$$

Die Fehlstandszahl ist also 6.

Dies ist eine gerade Zahl, also ist π gerade. (Dies sieht man auch daran, dass sich π als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt.).

b) Hier ergibt sich

$$\pi \xrightarrow{(14)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(27)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(37)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(58)} \mathrm{id}.$$

Folglich hat π die Darstellung $\pi = (14)\circ(27)\circ(37)\circ(58)$.

Die Permutation hat folgende Fehlstände:

$$(1,3),\ (1,4),\ (1,7),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,6),\ (2,7),\ (2,8),$$
$$(3,4),\ (5,6),\ (5,7),\ (5,8),\ (6,7),\ (6,8).$$

Dies bedeutet $f(\pi) = 14$, die Permutation ist also ebenfalls gerade.

③

a) $$\det A = \det \begin{pmatrix} \alpha-6 & 17-\alpha & 2\alpha-1 \\ -2 & \alpha+9 & \alpha+5 \\ -7-\alpha & 2\alpha+14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} (\alpha-6)(\alpha+9)\cdot 0 + (17-\alpha)(\alpha+5)(-7-\alpha)$$
$$+(2\alpha-1)(-2)(2\alpha+14) - (-7-\alpha)(\alpha+9)(2\alpha-1)$$
$$-(2\alpha+14)(\alpha+5)(\alpha-6) - 0\cdot(-2)(17-\alpha)$$

$$= \begin{cases} \alpha^3 + 6\alpha^2 - 37\alpha - 210 & \text{(durch Ausmultiplizieren, Nullstelle ?)} \\ (\alpha+7)\cdot\big[(\alpha-17)(\alpha+5) - 4(2\alpha-1) \\ \qquad + (\alpha+9)(2\alpha-1) - 2(\alpha+5)(\alpha-6)\big] \end{cases}$$

$$= (\alpha+7)\big[(\alpha+5)(-\alpha-5) + (2\alpha-1)(\alpha+5)\big]$$

$$= (\alpha+7)(\alpha+5)(\alpha-6) \quad \text{(durch Ausklammern).}$$

b) $$\det A = \det \begin{pmatrix} \alpha-6 & 17-\alpha & 2\alpha-1 \\ -2 & \alpha+9 & \alpha+5 \\ -7-\alpha & 2\alpha+14 & 0 \end{pmatrix}$$

$\cdot 2$

$$= \det \begin{pmatrix} \alpha-6 & \alpha+5 & 2\alpha-1 \\ -2 & \alpha+5 & \alpha+5 \\ -7-\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{letzter Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} -(7+\alpha) \det \begin{pmatrix} \alpha+5 & 2\alpha-1 \\ \alpha+5 & \alpha+5 \end{pmatrix} \; (-1)$$

$$= -(7+\alpha) \det \begin{pmatrix} \alpha+5 & 2\alpha-1 \\ 0 & -\alpha+6 \end{pmatrix}$$

$$= -(7+\alpha)(\alpha+5)(-\alpha+6) = (\alpha+7)(\alpha+5)(\alpha-6).$$

zu a) A singulär $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \{-7, -5, 6\}$.

zu b) A invertierbar $\Leftrightarrow$ A nicht singulär $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha \notin \{-7, -5, 6\}.$$

4

a) $D_1(x) = D_{0+1}(x) = \det(a_0) = a_0$,

$$D_2(x) = D_{1+1}(x) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = a_0 x + a_1 ;$$

$$D_3(x) = D_{2+1}(x) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} a_0 x^2 + a_1 x + a_2 .$$

b)

$$D_{n+1}(x) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{letzte Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung nach}}{=}} (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot x \cdot \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+(n+1)} \cdot a_n \det\begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot D_n(x) + (-1)^n a_n \cdot (-1)^n = x \cdot D_n(x) + a_n$$

Beh.: $D_{n+1}(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Induktionsanfang: $(n=0)$: $D_1(x) = a_0$ (vgl. a))

Induktionsschritt: $n \to n+1$.

$$D_{n+2}(x) \underset{\substack{\text{Rekursions-}\\ \text{formel}}}{=} x \cdot D_{n+1}(x) + a_{n+1}$$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} x\,(a_0 x^n + \dots + a_n) + a_{n+1}$$

$$= a_0 x^{n+1} + \dots + a_n x + a_{n+1} .$$

c) B_{n+1} regulär $\iff \det B_{n+1} \neq 0$.

$$\det B_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n D_{n+1}(-1) \qquad (\text{mit } a_0 = a_1 = \dots = a_n = 1)$$

b) $\overset{\underline{\text{b)}}}{=}$

$$(-1)^n \left[a_0 (-1)^n + \dots + a_{n-1}(-1) + a_n \right)$$

$$= (-1)^n \left[(-1)^n + \dots + (-1) + (-1)^0 \right]$$

$$= (-1)^n \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n}{2} \left(1 + (-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ für ungerades } n \\ 1 & , \text{ für gerades } n \end{cases}.$$

B_{n+1} invertierbar $\iff$ n gerade .

(5)

a) $D_2(x) = \det A_2 = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & 2x \end{pmatrix} = 2x^2 + 2 .$

$D_3(x) = \det A_3 = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & 2x & -2 \\ 0 & 3 & 3x \end{pmatrix}$

$\underset{\text{Sarrus}}{=} 6x^3 + 12x .$

b)

$$D_{n+1}(x) = \det A_{n+1} = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 2x & -2 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & n & nx & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 & (n+1)x \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{letzte Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (-1)^{(n+1)+(n+1)} (n+1) \cdot x \cdot \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 2x & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-1)x & -(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n & nx \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+(n+1)} (-n) \cdot \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 2x & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & n-1 & (n-1)x & -(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{letzten Zeile} \\ \text{in 2. Det.}}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (n+1)x \cdot D_n(x) + n(n+1) D_{n-1}(x) .$$

c)

$$D_{n+1}(0) \underset{b)}{=} (n+1)\cdot n \, D_{n-1}(0)$$

$$= (n+1)\cdot n\cdot(n-1)(n-2)\cdot D_{n-3}(0)$$

$$= \begin{cases} (n+1)\cdot n\cdot \ldots \cdot 4\cdot D_3(0) \overset{a)}{=} 0 & \text{für gerades } n \\ (n+1)\cdot n\cdot \ldots \cdot 3\cdot D_2(0) \overset{a)}{=} (n+1)! & \text{für ungerades } n \end{cases}.$$

(6) $(A - \lambda E_4) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ besitzt Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\text{Rang}\,(A - \lambda E_4) \leq 3$ $\Leftrightarrow$

$$0 = \det(A - \lambda E_4)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -3 & -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(-1)

$$= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -3 & -2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

(-1)

$$= (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ -2 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \quad (-1)$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 (\lambda-1)(\lambda-6)$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ oder $\lambda = 6$.

b) $\lambda = 1$: LGS: $(A - E_4)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tfrac{3}{2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$.

$\lambda = -1$: LGS: $(A + E_4)\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$.

$\lambda = 6$: LGS $(A - 6E_4)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -7 & -5 \\ -3 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \left(-\frac{3}{7}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$.

⑦ Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär.

Bekanntlich ist unter diesen Voraussetzungen $\det A \neq 0 \neq \det B$

und

$$\operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E_n$$

(oder $\operatorname{adj} A = (\det A) \cdot A^{-1}$

oder $\frac{1}{\det A} \cdot A = (\operatorname{adj} A)^{-1}$) .

a)
$$\det(\operatorname{adj} A) = \det\big(\underbrace{(\det A)}_{\in \mathbb{C}} \cdot A^{-1} \big)$$
$$= (\det A)^n \det(A^{-1})$$
$$= (\det A)^n (\det A)^{-1} = (\det A)^{n-1} .$$

b)
$$(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A))(\operatorname{adj} A) = \det(\operatorname{adj} A) \cdot E_n$$
$$\underset{a)}{=} (\det A)^{n-1} E_n .$$

Damit
$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1} (\operatorname{adj} A)^{-1}$$
$$= (\det A)^{n-1} \left(\frac{1}{\det A} \cdot A \right)$$
$$= (\det A)^{n-2} \cdot A$$

c)
$$\operatorname{adj}(AB) = \det(A \cdot B) \cdot (AB)^{-1}$$
$$= \det A \cdot \det B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$
$$= (\det B \cdot B^{-1})(\det A\, A^{-1})$$
$$= \operatorname{adj}(B) \operatorname{adj}(A)$$

8

$$\det A_\alpha = \det \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 6-3\alpha & \alpha^2-1 & \alpha-1 \\ \underbrace{\alpha^2-\alpha-2}_{=(\alpha-2)(\alpha+1)} & \alpha(\alpha-1) & \alpha(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} (\alpha-2)(\alpha-1)^2(-1)^{1+3}\cdot(-1) \det \begin{pmatrix} -2 & \alpha+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2).$$

b) LGS $(*)$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ Rang $A_\alpha = 3$

$\Leftrightarrow \det A_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -2, 1, 2$.

Dann

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & \alpha(1-\alpha) \end{pmatrix}}{\det A_\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha-1) \det \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1-\alpha \\ \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{pmatrix}}{\det A_\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha-1)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A_\alpha} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha+2)(\alpha-2)(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2}.$$

$$\det A_\alpha \cdot y = \det\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 1-\alpha \\ 6-3\alpha & 0 & \alpha-1 \\ \alpha^2-\alpha-2 & \alpha-1 & \alpha(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha)\det\begin{pmatrix} \alpha-2 & 1-\alpha \\ 6-3\alpha & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-1)^2(\alpha-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2(\alpha-2)(\alpha-1)^2,$$

also $$y = \frac{2}{\alpha+2}.$$

$$\det A_\alpha \cdot z = \det\begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ 6-3\alpha & \alpha^2-1 & 0 \\ \alpha^2-\alpha-2 & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-1)\det\begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ 6-3\alpha & \alpha^2-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-1)^2(\alpha-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4),$$

also $$z = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.$$

⑨ Beweis per Induktion:

$$n=1: \quad V_1 = 1 \quad \Rightarrow \det 1 = \prod_{\substack{k<l \\ k,l=1}} (x_l - x_k) \,,$$

$$n=2: \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det V_2 = (x_2 - x_1) \,.$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$:

$$\det V_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$\cdot(-x_{n+1})$

$\cdot(-x_{n+1})$

$\vdots$

$\cdot(-x_{n+1})$

$\cdot(-x_{n+1})$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & \cdots & (x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_{n+1}) & (x_1^n - x_1^{n-1} x_{n+1}) \\ 1 & x_2 - x_{n+1} & \cdots & (x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_{n+1}) & (x_2^n - x_2^{n-1} x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_{n+1} & \cdots & (x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_{n+1}) & (x_n^n - x_n^{n-1} x_{n+1}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Entw.}\\\text{nach}\\\text{letzter}\\\text{Zeile}}}{=} (-1)^{1+(n+1)} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_{n+1} & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_{n+1}) & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n - x_{n+1} & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_{n+1}) & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n (x_1 - x_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n+1}) \det V_n$$

$$= (-1)^n (-1)^n (x_{n+1} - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_{n+1} - x_n) \cdot \det V_n$$

$$\underset{(IV)}{=} (x_{n+1} - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_{n+1} - x_n) \prod_{\substack{k<l \\ k,l=1,\ldots,n}} (x_l - x_k)$$

$$= \prod_{\substack{k<l \\ k,l=1,\ldots,n+1}} (x_l - x_k) .$$