UNIVERSITÄT KARLSRUHE 01.06.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

7.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (T)
Welche linearen Abbildungen der Ebene werden durch die folgenden Matrizen beschrieben? Deuten Sie geometrisch.

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \text{iv)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Ü)
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei orthogonal. Zeigen Sie, dass es Zahlen $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$ gibt, so dass gilt:

$$A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Ü)
Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ gegeben. Für jedes $\varphi > 0$ wird durch

$$f_\varphi(\vec{x}) = (\cos\varphi)\vec{x} + (\sin\varphi)(\vec{a} \times \vec{x}) + (1 - \cos\varphi)(\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a}$$

eine Abbildung $f_\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass f_φ eine lineare Abbildung ist, und geben Sie die bezüglich der Standardbasis zugehörige Abbildungsmatrix an.

b) Bestimmen Sie $f_\varphi(\vec{a})$ und $f_\varphi(\vec{c})$ für einen beliebigen Vektor $\vec{c}$, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht. Deuten Sie die Abbildung geometrisch.

c) Rechnen Sie nach, dass $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$ gilt.

Aufgabe 4 (Ü)
Für zwei Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ sei das System $u'(x) = 8u(x) - 6v(x)$, $v'(x) = 9u(x) - 7v(x)$ linearer Differentialgleichungen, kurz

$$(\star) \qquad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle Eigenwerte von A sowie eine Matrix S derart, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt besitzt.
Lösen Sie das Problem $(\star)$, indem Sie neue Funktionen $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ aus u und v kombinieren.

– bitte wenden –

Aufgabe 5 (T)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Können die Matrizen diagonalisiert werden?

Aufgabe 6 (T)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt besitzt.

Aufgabe 7 (Ü)
Bestimmen Sie die Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.