Höhere Mathematik II

Lösungen zum 7. Übungsblatt

(1) Legt man als Basis die Standardbasis $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ zugrunde, so stehen in den Spalten der Abbildungsmatrizen die Bilder von $\vec{e_1}$ bzw. $\vec{e_2}$ unter der durch die Abbildungsmatrix vermittelten linearen Abbildung f.

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $f(\vec{e_1}) = -\vec{e_2}$, $f(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$,

d.h. f beschreibt eine Drehung um den Winkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

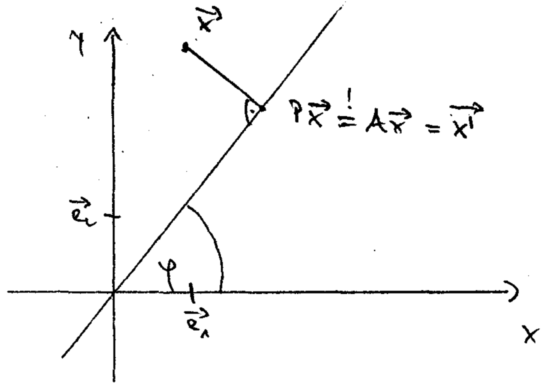
ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$, $f(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}$,

d.h. f beschreibt die Spiegelung an der x-Achse.

iii) Die Abbildungsmatrix einer orthogonalen Projektion auf eine Gerade l, die mit der x-Achse den Winkel φ einschließt, hat folgende Form (nachrechnen!):

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

Skizze:



Hier hat A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$, d.h. f ist die

orthogonale Projektion auf die Gerade l mit $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

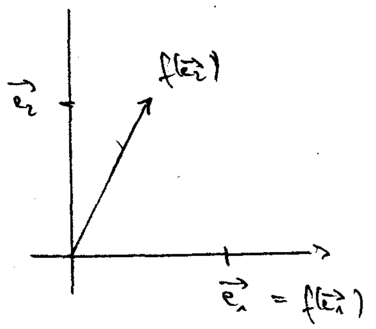
iv) Die Abbildungsmatrix einer Drehung um den Winkel φ hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Hier $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d.h. f ist eine Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

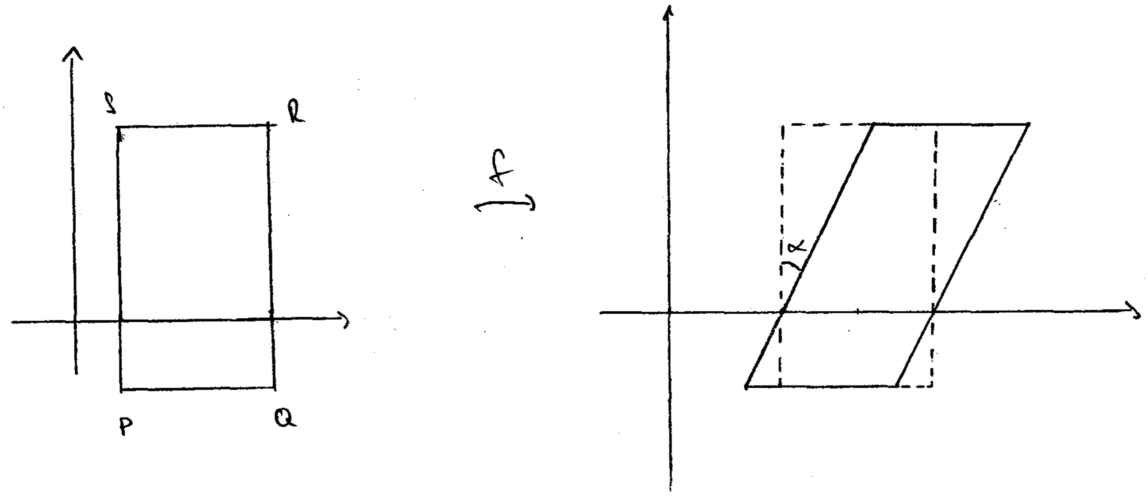
v) $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man sieht $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$, $f(\vec{e_2}) = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \vec{e_2}$.

Skizze:



f beschreibt eine Scherung.

Bsp.: Bilde ein Rechteck PQRS unter f ab:



Der Winkel der Scherung ist α, wobei $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

(2) Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ orthogonal, so haben insbesondere beide Spalten die Norm 1. Es gilt folglich $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$. Daher existiert ein Winkel $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ mit $(\alpha, \gamma) = (\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$.
Ebenso gilt $\beta^2 + \delta^2 = 1$, also existiert ein Winkel $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$ mit $(\delta, -\beta) = (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$.
Die Matrix hat somit die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Da A orthogonal ist, stehen die beiden Spalten senkrecht aufeinander, d.h. es gilt

$$0 = -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Hieraus folgt $\varphi_1 - \varphi_2 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Daher ist

$$-\sin\varphi_2 = -\sin(\varphi_1 - k\pi) = -(-1)^k \sin\varphi_1,$$
$$\cos(\varphi_2) = \cos(\varphi_1 - k\pi) = (-1)^k \cos\varphi_1.$$

Mit $c := \cos\varphi_1$ und $s := \sin\varphi_1$ haben wir also die behauptete Darstellung.

③ a) Für $\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}$ gilt

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x},$$

wenn a_1, a_2, a_3 die Komponenten von $\vec{a}$ sind, sowie

$$(\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{a} = \begin{pmatrix} (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3)\, a_1 \\ (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3)\, a_2 \\ (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3)\, a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \vec{x} .$$

Folglich ergibt sich

$$f(\vec{x}) = \Bigg[\cos\varphi\, E_3 + (\sin\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (1-\cos\varphi) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \Bigg] \vec{x} .$$

Es gilt also $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ mit einer gewissen Matrix A.
Diese Matrix ist die gesuchte Darstellungsmatrix, und die Linearität von f ist damit auch gezeigt.

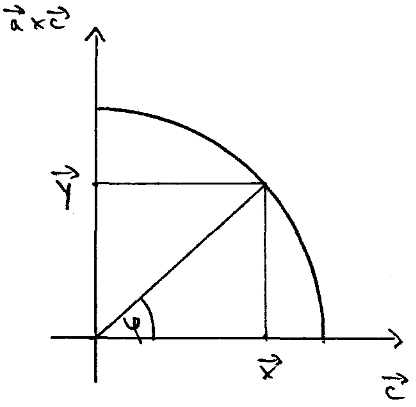
b) Wegen $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 1$ gilt

$$f_\varphi(\vec{a}) = (\cos\varphi)\vec{a} + (\sin\varphi)(\vec{a} \times \vec{a}) + (1-\cos\varphi)(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{a}$$
$$= (\cos\varphi)\vec{a} + (1-\cos\varphi)\vec{a} = \vec{a}.$$

Für einen Vektor $\vec{c}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ ist, gilt $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$; es ergibt sich also

$$f_\varphi(\vec{c}) = (\cos\varphi)\vec{c} + (\sin\varphi)(\vec{a} \times \vec{c}).$$

Um zu verstehen, was mit $\vec{c}$ passiert, betrachten wir die folgende Skizze:



Dabei ist zu beachten: Der Vektor $\vec{a}$ ist nicht eingezeichnet; er zeigt senkrecht aus der Zeichenebene heraus. Weiter gilt: Da $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht zueinander sind, der Winkel zwischen ihnen also $\frac{\pi}{2}$ ist, gilt $\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{c}\| \sin\frac{\pi}{2} = \|\vec{c}\|$.

Für die eingezeichneten Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt $\vec{x} = (\cos\varphi)\vec{c}$ und $\vec{y} = (\sin\varphi)(\vec{a} \times \vec{c})$.

Somit ist $f_\varphi(\vec{c}) = \vec{x} + \vec{y}$ der Vektor, den man erhält, wenn man $\vec{c}$ um den Winkel φ dreht, und zwar um die durch $\vec{a}$ gegebene Drehachse.

Einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ können wir stets schreiben als $\vec{x} = \lambda \vec{a} + \vec{c}$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektor $\vec{c}$.

Dann ist $f_\varphi(\vec{x}) = \lambda f_\varphi(\vec{a}) + f_\varphi(\vec{c}) = \lambda \vec{a} + f_\varphi(\vec{c})$.

Die Abbildung f_φ stellt daher eine Drehung um den Winkel φ um die Drehachse $\{\lambda \vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ dar.

c) Offenbar gilt $f_\alpha(f_\beta(\vec{a})) = f_\alpha(\vec{a}) = \vec{a} = f_{\alpha+\beta}(\vec{a})$.

Ist $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$, so haben wir

$$
\begin{aligned}
f_\alpha(f_\beta(\vec{c})) &= f_\alpha\big((\cos\beta)\vec{c} + (\sin\beta)(\vec{a}\times\vec{c})\big) \\
&= (\cos\beta)\, f_\alpha(\vec{c}) + (\sin\beta)\, f_\alpha(\vec{a}\times\vec{c}) \\
&= (\cos\beta)\big[(\cos\alpha)\vec{c} + (\sin\alpha)(\vec{a}\times\vec{c})\big] \\
&\quad + (\sin\beta)\big[(\cos\alpha)(\vec{a}\times\vec{c}) + (\sin\alpha)\underbrace{(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c}))}_{=-\vec{c}}\big] \\
&= (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)\vec{c} + (\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)(\vec{a}\times\vec{c}) \\
&= \cos(\alpha+\beta)\,\vec{c} + \sin(\alpha+\beta)(\vec{a}\times\vec{c}) \\
&= f_{\alpha+\beta}(\vec{c}).
\end{aligned}
$$

Der Vektor $\vec{a}$ läßt sich zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Wie wir gerade gesehen haben, stimmen die Abbildungen $f_\alpha \circ f_\beta$ und $f_{\alpha+\beta}$ auf einer solchen Basis überein.

Damit ist $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ bewiesen.

(4)

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 54$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

Eigenvektor zu λ_1: $(A+E)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \vec{x} \in \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Eigenvektor zu λ_2: $(A-2E)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \vec{x} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Mit $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Es ist $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, oder

$$S^{-1}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -u'+v' \\ 3u'-2v' \end{pmatrix}} = DS^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} -u+v \\ 3u-2v \end{pmatrix}}$$

Setze $\tilde{u} = -u+v$, $\tilde{v} = 3u-2v$.

(Also $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{u}+\tilde{v} \\ 3\tilde{u}+\tilde{v} \end{pmatrix}$).

Dann gilt: $\begin{pmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$.

Also $\tilde{u}'(x) = -\tilde{u}(x) \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{u}(x) = A \cdot e^{-x}$

$\tilde{v}'(x) = 2\tilde{v}(x) \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{v}(x) = B\, e^{2x}$

Somit sind

$$u(x) = 2A\, e^{-x} + B\, e^{2x}$$
$$v(x) = 3A\, e^{-x} + B\, e^{2x}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ Lösungen des Systems.

(5)

a) $$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ \lambda-18 & 18-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 22-\lambda & 20-\lambda & -4 \\ \lambda-18 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$+$

$$= (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix} = (18-\lambda)\left[(20-\lambda)(16-\lambda)+4\right]$$

$$= (18-\lambda)(324-36\lambda+\lambda^2) = (18-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$$

Damit ist $\lambda = 18$ dreifacher Eigenwert.

<u>Bestimmung des zugehörigen Eigenraumes:</u>

Löse $(A-18E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ (-\tfrac{1}{2}) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad (s,t\in\mathbb{R})$.

$$E(18) = \left\{\vec{x} : \vec{x} = s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad (s,t\in\mathbb{R})\right\}$$

A ist nicht diagonalisierbar, da A nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

b)

$$\det(B-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\lambda^2 - ((-2\lambda)+2)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2) = (1-\lambda)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2}) \overset{!}{=} 0$$

Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

<u>Eigenraum zu λ_1:</u> $(A-E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \cdot 2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(1) = \left\{ \vec{x} : x = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{R}) \right\}$$

<u>Eigenraum zu $\lambda_2 = \sqrt{2}$:</u> $(A-\sqrt{2}E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & 2 \\ 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-(1-\sqrt{2})) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \left(\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2) = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = s\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{R}) \right\}$$

Eigenraum zu $\lambda_3 = -\sqrt{2}$: $\quad (A + \sqrt{2}\,E)\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(-\sqrt{2}) = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = s \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \right\}.$$

Die Matrix B ist diagonalisierbar, denn B besitzt drei linear unabhängige Eigenvektoren.

(6)

a) Wir berechnen die Determinante von $(A-\lambda E)$:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2\left[(3-\lambda)(1-\lambda)-3\right]$$

$$= (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = (\lambda-4)^3\lambda .$$

Die Matrix A hat zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3).

b) Wir bestimmen die Eigenräume:

Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A-0E)\vec{x} = \vec{0}$, also $A\vec{x} = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad E(0) = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\vec{c}_1} \quad (s \in \mathbb{R}) \right\}$$

Jetzt für $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alle Zeilen sind Vielfache voneinander, es bleibt also nur eine Gleichung übrig.

Es folgt

$$E(4) = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = r \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\vec{c}_2} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{c}_3} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{c}_4} \quad (r, s, t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

Die Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ sind linear unabhängig, also leistet

$C := (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)$ das Gewünschte:

$$C^{-1} A C = \operatorname{diag}(0, 4, 4, 4).$$

(7) A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Für jeden Eigenwert gilt:

algebr. Vielfachheit = geom. Vielfachheit

(Dabei liest man die algebraische Vielfachheit aus dem charakteristischen Polynom ab; die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums).

Es ist
$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-\lambda)(-\lambda)\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-\alpha)^2\lambda^2.$$

Fall 1: $\alpha = 0$: $\lambda = 0$ ist Eigenwert der algebr. Vielfachheit 4

Bestimmung des Eigenraums $E(0)$: $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(0) = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s,t\in\mathbb{R}) \right\}$$

Also $\dim E(0) \neq 4$; und somit ist A für $\alpha = 0$ nicht diagonalisierbar.

Fall 2: $\alpha \neq 0$: $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \alpha \end{matrix}\right\}$ ist Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2.

$$r_1 = \text{rang}\,(A - 0E) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

also $\dim E(0) = 4 - 2 = 2$.

$$r_2 = \text{rang}\,(A - \alpha E) = \text{rang}\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4 \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$$

Also $\dim E(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 4 \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$

Insgesamt: A ist nur im Fall $\alpha = 4$ diagonalisierbar.