UNIVERSITÄT KARLSRUHE 08.06.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

8.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (T)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Zu jeder Basis $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ des $\mathbb{C}^n$ existiert ein Orthogonalsystem $\{\vec{c}_1, ..., \vec{c}_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ mit der Eigenschaft:

$$\operatorname{Lin}(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r) = \operatorname{Lin}(\vec{c}_1, ..., \vec{c}_r) \quad \text{für jedes } r = 1, ..., n.$$

Aufgabe 2 (T)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Drehmatrix, d.h. A ist orthogonal und $\det A = 1$. Zeigen Sie:

a) A besitzt den Eigenwert 1.

b) Ist $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, so besteht die Gerade $G = \operatorname{Lin}(\vec{v})$ nur aus Fixpunkten der durch A vermittelten linearen Abbildung, d.h. es gilt $A\vec{x} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in G$.

Aufgabe 3 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $S = (s_{jk})_{j,k=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Für $1 \le r \le n$ (mit $r \in \mathbb{N}$) heißt die Zahl

$$\Delta_r(S) := \det\left((s_{jk})_{j,k=1,...,r}\right) = \det\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r1} & \dots & s_{rr} \end{pmatrix}$$

r-ter Hauptminor von S.
Beweisen Sie den Satz von Jacobi: Sind alle Hauptminoren der Matrix S ungleich 0, so gibt es eine rechte unipotente Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass gilt:

$$S = R^\top DR \quad \text{und} \quad D = \operatorname{diag}\left(\Delta_1(S), \frac{\Delta_2(S)}{\Delta_1(S)}, \frac{\Delta_3(S)}{\Delta_2(S)}, \dots, \frac{\Delta_n(S)}{\Delta_{n-1}(S)}\right).$$

Dabei nennt man eine Matrix $A = (a_{jk})_{j,k=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rechte unipotente Matrix, wenn $a_{jj} = 1$ für $j = 1, ..., n$ und $a_{jk} = 0$ für alle $j, k = 1, ..., n$ mit $j > k$ gilt.

Aufgabe 4 (Ü)
Beweisen Sie das Hurwitzsche Definitheitskriterium: Eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von S positiv sind.

– bitte wenden –

Aufgabe 5 (T)
Gegeben sei die Quadrik $Q: \ 2xy - 2xz + 2yz + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$.

a) Bestimmen Sie die zugehörige symmetrische Matrix A, den Vektor $\vec{b}$ und die Zahl c, so dass
$$Q: \quad \vec{x}^\top A\vec{x} + 2\vec{b}^\top \vec{x} + c = 0.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

c) Geben Sie eine Transformationsmatrix P an, so dass $P^\top AP$ Diagonalgestalt besitzt.

d) Man setze $\vec{y} = P^\top \vec{x}$ und schreibe die Quadrik in den neuen Variablen y_1, y_2, y_3. Bestimmen Sie anschließend die Normalform von Q.

Aufgabe 6 (T)
In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimme man die Normalform der Quadrik
$$Q_\alpha : \quad 2\alpha(x^2 - y^2) + 5(x^2 + y^2) - 8xy = 9 - 4\alpha^2.$$

Definition: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien die Normen $\|\cdot\|_A , \|\cdot\|_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Beide Normen heißen äquivalent, wenn es Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\|\vec{x}\|_A \leq C \|\vec{x}\|_B \ \ (\vec{x} \in \mathbb{C}^n) \quad \text{und} \quad \|\vec{x}\|_B \leq D \|\vec{x}\|_A \ \ (\vec{x} \in \mathbb{C}^n)$$
gilt.

Aufgabe 7 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. In $\mathbb{C}^n$ sei die Norm $\|\cdot\|_p$ für $p \in [1, \infty)$ durch
$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \qquad (\vec{x} \in \mathbb{C}^n)$$
und für $p = \infty$ durch $\|\vec{x}\|_\infty := \max\limits_{k=1,\ldots,n} |x_k|$ für $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gegeben.
Zeigen Sie: Sind $p, q \in [1, \infty]$, so sind die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ äquivalent.

Aufgabe 8 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $(\vec{x}^{\,(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^n$ und $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$. Definitionsgemäß gilt $\vec{x}^{\,(k)} \to \vec{x}$ für $k \to \infty$, falls $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\vec{x}^{\,(k)} - \vec{x}\right\| = 0$, wobei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ die euklidische Norm des $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\vec{x}^{\,(k)} \to \vec{x} \text{ für } k \to \infty \text{ genau dann, wenn für jedes } l = 1, ..., n \text{ gilt: } x_l^{(k)} \to x_l \text{ für } k \to \infty.$$