# Höhere Mathematik II

Lösungen zum 8. Übungsblatt

① Es sei $n \in \mathbb{N}$, und $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$.

Gesucht: Orthogonalbasis $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ mit der

(*) Eigenschaft: $\mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ für jedes $r = 1, \dots, n$.

<u>Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt.</u>

Induktive Konstruktion nach $r$:

<u>$r = 1$:</u> Setze $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$. Dann ist $\mathrm{Lin}(\vec{b}_1) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_1)$.

<u>Bemerkung:</u> Es sei $M \subseteq \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. $M$ heißt Orthogonalsystem, falls für je zwei Elemente $\vec{x}, \vec{y} \in M$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ stets $\vec{x} \perp \vec{y}$ gilt, d.h. $\vec{y}^* \cdot \vec{x} = 0$ $(\vec{x}, \vec{y} \in M,\ \vec{x} \neq \vec{y})$.

<u>Induktionsannahme:</u> Für beliebiges $r < n$ sei $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r\}$ ein Orthogonalsystem mit der Eigenschaft (*) gefunden.

<u>Induktionsschluss:</u> Wir setzen $\vec{c}_{r+1} = \vec{b}_{r+1} + \lambda_1 \vec{c}_1 + \dots + \lambda_r \vec{c}_r$ mit $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \dots, r)$.

Da $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_{r+1}\}$ ein Orthogonalsystem sein soll, müssen wir

$$\langle \vec{c}_{r+1}, \vec{c}_k \rangle = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, r \text{ fordern.}$$

( Dabei ist $\langle x, y \rangle := \vec{y}^* \vec{x}$ $(\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n)$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{C}^n$.)

Diese Forderung führt auf

$$\langle \vec{b}_{r+1}, \vec{c}_k \rangle + \lambda_k \langle \vec{c}_k, \vec{c}_k \rangle = 0,$$

also

$$\lambda_k = - \frac{\langle \vec{b}_{r+1}, \vec{c}_k \rangle}{\underbrace{\langle \vec{c}_k, \vec{c}_k \rangle}_{\neq 0, \text{ da } \vec{0} \notin \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r\}}} \quad (k = 1, \dots, r).$$

Somit sehen wir

$$(*) \qquad \vec{c}_{r+1} = \vec{b}_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle \vec{b}_{r+1}, \vec{c}_k \rangle}{\langle \vec{c}_k, \vec{c}_k \rangle} \vec{c}_k .$$

Es ist $\vec{c}_{r+1} \neq \vec{0}$, denn sonst wäre $\vec{b}_{r+1} \in \mathrm{Lin}(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r) = \mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r)$, also $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r+1}$ nicht linear unabhängig.

Ferner ist $\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{r+1}\}$ nach Konstruktion ein Orthogonalsystem.

Nach $(*)$ und der Induktionsannahme gilt

$$\mathrm{Lin}(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{r+1}) \subseteq \mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r+1}).$$

Da nach $(*)$ $\vec{b}_{r+1}$ auch eine Linearkombination der $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r, \vec{c}_{r+1}$ ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion, also

$$\mathrm{Lin}(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{r+1}) = \mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r+1}) .$$

Das Verfahren endet bei $r = n$, wo wir ein Orthogonalsystem $\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ aus $n$ Vektoren von $\mathbb{C}^n$ erhalten.

② b) Ist $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert $1$, so gilt $A\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$.

Für $\vec{x} \in \mathrm{Lin}(\vec{v})$, also $\vec{x} = \lambda \vec{v}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt daher

$A\vec{x} = A\lambda\vec{v} = \lambda A \vec{v} = \lambda \vec{v} = \vec{x}$.

a) Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ die Eigenwerte nebst Eigenvektoren von $A$ (Eigenwerte evtl. mehrfach hingeschrieben, entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit.)

Dann gilt $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (i = 1, 2, 3)$, und insbesondere

$\|A\vec{v}_i\| = |\lambda_i| \, \|\vec{v}_i\| \quad (i = 1, 2, 3)$.

Da $A$ orthogonal ist, gilt andererseits $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad (x \in \mathbb{R}^3)$, und wir erhalten

$$\|\vec{v}_i\| = \|A\vec{v}_i\| = |\lambda_i| \, \|\vec{v}_i\| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Da $\vec{v}_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ gilt, erhalten wir $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$.

Das charakteristische Polynom von $A$ besitzt reelle Koeffizienten und den Grad $3$, hat also mindestens eine reelle Nullstelle. Die anderen beiden Nullstellen können komplexwertig sein, und sind in diesem Falle komplex konjugiert zueinander.

O.B.d.A sei $\lambda_1$ reell, und somit $\lambda_1 = 1$ oder $\lambda_1 = -1$.

Im Falle $\lambda_1 = 1$ ist nichts mehr zu zeigen.

Im Falle $\lambda_1 = -1$ folgt aus $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, dass $1 = -\lambda_2 \lambda_3$ ist. $(*)$

Wären $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, also $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$, so folgte

$\lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \overline{\lambda_2} = |\lambda_2|^2 = 1$, im Widerspruch zu $(*)$.

Also sind $\lambda_2$ und $\lambda_3$ reell.

Wegen (*) können nicht beide gleich $-1$ sein, also gilt

$\lambda_2 = 1$ oder $\lambda_3 = 1$.

(3) Zum Beweis des Jacobischen Satzes verwenden wir den folgenden

<u>Hilfssatz:</u> Es sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

$S$ besitze die Blockzerlegung

$$S = \begin{pmatrix} V & \vec{w} \\ \vec{w}^T & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad V \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},\ V \text{ symmetrisch}, \quad \vec{w} \in \mathbb{R}^{n-1},\ a \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

a) Ist $V$ regulär, so läßt sich $S$ schreiben als

$$S = A^T \begin{pmatrix} V & \vec{0} \\ \vec{0}^T & b \end{pmatrix} A$$

mit $A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & V^{-1}\vec{w} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ und

$$b = a - \vec{w}^T V^{-1} \vec{w}.$$

b) Ist $a \neq 0$, so ist

$$S = B \begin{pmatrix} R & \vec{0} \\ \vec{0}^T & a \end{pmatrix} B^T \quad \text{mit}$$

$$B = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \frac{\vec{w}}{a} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = V - \frac{\vec{w}\cdot w^T}{a}.$$

Wie man sieht, sind $A$ und $B$ rechte unipotente Matrizen.

Der Beweis des Hilfssatzes erfolgt durch einfaches Nachrechnen.

<u>Zum Beweis des Jacobischen Satzes.</u> Dieser erfolgt mittels vollständiger Induktion.

Für $n=1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig.

Induktionsschritt: $n-1 \to n$. Die Behauptung gelte also für $n-1$.

Aufgrund der Darstellung
$$S = \begin{pmatrix} (s_{jk})_{j,k=1,\dots,n-1} & \begin{matrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{n-1,n} \end{matrix} \\ s_{n1} \dots s_{n-1,n} & s_{nn} \end{pmatrix}$$

und $\Delta_{n-1}(S) \neq 0$, folgt aus dem Hilfssatz die Zerlegung
$$S = A^T \begin{pmatrix} (s_{jk})_{j,k=1,\dots,n-1} & \vec{0} \\ \vec{0} & b \end{pmatrix} A \quad \text{mit}$$

einer rechts unipotenten Matrix $A$.

Der Determinantenmultiplikationssatz liefert wegen $\det A = 1$ die Gleichung
$$\det S = \Delta_{n-1}(S) \cdot b, \text{ also}$$

$$b = \det S / \Delta_{n-1}(S) = \Delta_n(S) / \Delta_{n-1}(S).$$

Ferner existiert nach Induktionsvoraussetzung eine rechte unipotente Matrix $\tilde{R}$ mit $(s_{jk})_{j,k=1,\dots,n-1} = \tilde{R}^T \tilde{D} \tilde{R}$ ist, wobei

$$\tilde{D} = \operatorname{diag}\left(\Delta_1(S), \Delta_2(S)/\Delta_1(S), \dots, \Delta_{n-1}(S)/\Delta_{n-2}(S)\right).$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes aus

$$S = A^T \begin{pmatrix} (s_{jk})_{j,k=1,\dots,n} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & b \end{pmatrix} A$$

$$= \underbrace{A^T \begin{pmatrix} \tilde{R} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}^T}_{=:R^T} \begin{pmatrix} \tilde{D} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{R} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} A}_{=:R}$$

(4) Zum Beweis des Hurwitzschen Definitheitskriterium verwenden wir die folgenden beiden Hilfsätze:

<u>Hilfsatz 1:</u> Jede positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist regulär.

<u>Beweis:</u> Wäre $S$ nicht regulär, so gäbe es ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $S\vec{x} = \vec{0}$, also wäre auch $\vec{x}^T S \vec{x} = 0$, also $S$ nicht positiv definit.

<u>Hilfsatz 2:</u> Es sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt

$S$ positiv definit $\iff$ $W^T S W$ positiv definit für jedes reguläre $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" Es sei $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Dann ist $\vec{x}^T W^T S W \vec{x} = (W\vec{x})^T S \underbrace{(W\vec{x})}_{\neq \vec{0}\text{, da } W \text{ regulär}} > 0$

$= \vec{y}^T S \vec{y} > 0$ mit $\vec{y} = W\vec{x}$.

Da $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ beliebig war, ist $W^T S W$ positiv definit.

„$\Leftarrow$" Setze $W = E$. $E$ ist regulär und damit nach Voraussetzung $E^T S E = S$ positiv definit.

Beweis des Hurwitzschen Kriteriums:

Bekanntlich ist eine Diagonalmatrix genau dann positiv definit, wenn jedes ihrer Diagonalelemente positiv ist.

Auf diesen einfachen Fall führen wir alles zurück.

Es sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

Damit ist auch jede Untermatrix $S_r = (s_{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ mit $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$ positiv definit, denn:

für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^r$, $\vec{x} \neq 0$ gilt:

$$\vec{x}^T S_r \vec{x} = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0 .$$

Folglich gilt nach Hilfssatz 1 $\Delta_r(S) \neq 0$.

Nach dem Satz von Jacobi gilt nun $S = R^T D R$

mit

$$(*) \qquad D = \mathrm{diag}\left( \Delta_1(S), \Delta_2(S)/\Delta_1(S), \dots, \Delta_n(S)/\Delta_{n-1}(S) \right)$$

und regulärem $R$.

Damit ist nach Hilfssatz 2 die Matrix $D$ positiv definit

und nach der Anfangsüberlegung

$$\Delta_1(S) > 0, \quad \Delta_2(S)/\Delta_1(S) > 0, \dots, \Delta_n(S)/\Delta_{n-1}(S) > 0,$$

also $\Delta_r(S) > 0$ für jedes $r = 1, \dots, n$, d.h. alle Hauptminoren sind positiv.

Sind umgekehrt alle Hauptminoren $\Delta_r(S)$ positiv, so ist die Matrix $D$ in $(*)$ positiv definit und folglich auch $S$ nach Hilfssatz 2.

(5)

Gegeben sei die Matrix Q:

$$2xy - 2xz + 2yz + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$$

a)

Setze $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw.

$$A = \frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{A}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

Dann ist $\underbrace{\vec{x}^T A \vec{x}}_{= \vec{x}^T \tilde{A} \vec{x}} + 2\vec{b}\vec{x} + c = 2xy - 2xz + 2yz + 2\sqrt{3}z + 3 = 0.$

b)

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda - 2\right] = -(1-\lambda)^2(\lambda+2)$$

Die Eigenwerte sind daher $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_{2/3} = 1$.

Bestimmung der zugehörigen Eigenräume:

$$(A - \lambda_1)\vec{x} = \vec{0}: \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum $E_{-2} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$(A - \lambda_2 E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum $E_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

c) Bilde Orthonormalsystem aus Eigenvektoren

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_1 \times \vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: \vec{c}_3$$

Setze $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, dann ist

$$P^T A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: D, \text{ also}$$

$A = PDP^T$.

d) Setze $\vec{y} = P^T \vec{x}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
0 &= \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + \vec{c} \\
&= \vec{x}^T P D P^T \vec{x} + 2\vec{b}^T \underbrace{P P^T}_{=E} \vec{x} + c \\
&= (P^T \vec{x})^T D P^T \vec{x} + 2\underbrace{(P^T \vec{b})^T}_{=:\vec{q}} P^T \vec{x} + c \\
&= \vec{y}^T D \vec{y} + 2\vec{q}^T \vec{y} + \vec{c},
\end{aligned}
$$

und $P^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Also in neuen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
Q:\quad 0 &= -2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1 + 2\sqrt{2}\,y_3 + 3 \\
&= -2(y_1^2 - y_1) + y_2^2 + (y_3^2 + 2\sqrt{2}\,y_3) + 3 \\
&= -2\left(y_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} + y_2^2 + (y_3 + \sqrt{2})^2 - 2 + 3 \\
&= -2\left(y_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y_2^2 + (y_3 + \sqrt{2})^2 + \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Setze $z_1 = y_1 - \frac{1}{2}$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3 + \sqrt{2}$.

Dann ist $Q$ (wieder in neuen Koordinaten) gegeben durch:

$$-2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \frac{3}{2} = 0$$

oder

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) - \left(\frac{z_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2 - \left(\frac{z_3}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2 = 1.$$

$Q$ ist ein zweischaliges Hyperboloid.

(6)

$K_\alpha: \quad 2\alpha(x_1^2 - x_2^2) + 5(x_1^2+x_2^2) - 8x_1x_2 = 9 - 4\alpha^2.$

oder anders geschrieben

$K_\alpha: \quad (2\alpha+5)x_1^2 + (5-2\alpha)x_2^2 - 8x_1x_2 = 9-4\alpha^2.$

In Matrixform geschrieben:

$$K_\alpha: \quad \vec{x}^T A \vec{x} = 9 - 4\alpha^2 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2\alpha+5 & -4 \\ -4 & 5-2\alpha \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} (2\alpha+5)-\lambda & -4 \\ -4 & (5-2\alpha)-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= [(2\alpha+5)-\lambda][(5-2\alpha)-\lambda] - 16$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda + 9 - 4\alpha^2 \overset{!}{=} 0$$

Also: $\lambda_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9 + 4\alpha^2}$
$= 5 \pm 2\sqrt{4+\alpha^2}$

Außerdem gilt: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 9 - 4\alpha^2.$

Eine Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren ist nicht nötig.
Seien $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ Eigenvektoren zu $\lambda_1, \lambda_2$ und $P = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$
eine orthogonale Matrix mit $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D.$

Setze $\vec{y} = P^T \vec{x}$, dann ist
$K_\alpha: \quad \vec{y}^T D \vec{y} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, also $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$

<u>Fallunterscheidungen</u>: <u>1.</u> $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \iff 9 - 4\alpha^2 = 0 \iff \alpha^2 = \frac{9}{4}.$

$\lambda_1 = 5 + 2\sqrt{4+\alpha^2} > 0, \quad \lambda_2 = 0.$

$K_\alpha: \quad \lambda_1^2 y_1^2 + 0 \cdot y_2^2 = 0$, also $y_1 = 0$ und $y_2^2 = t$ beliebig.

Somit $y_1 = 0$, $y_2 = \pm\sqrt{t}$.

$K_\alpha$ beschreibt daher eine <u>Gerade</u>.

<u>2.</u> $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq \frac{9}{4}$.

i) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow 9 - 4\alpha^2 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{9}{4}$.

Also $\lambda_1 > 0$ und damit $\lambda_2 < 0$.

$K_\alpha: \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\lambda_2} + \frac{y_2^2}{\lambda_1} = 1 \Leftrightarrow -\frac{y_1^2}{|\lambda_2|} + \frac{y_2^2}{\lambda_1} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{y_1}{\sqrt{|\lambda_2|}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{|\lambda_1|}}\right)^2 = 1$$ <u>Hyperbel</u>

ii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow 9 - 4\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \frac{9}{4}$.

Also $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$.

$K_\alpha: \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 = 1$$ <u>Ellipse</u>

⑦ Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. Für $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ sei

$$\|\vec{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad , \text{ falls } \quad p \neq \infty ,$$

und
$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k| \quad .$$

Damit wird durch $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ , $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|_p$ , eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ erklärt, denn:

Fall $p \in [1, \infty)$: Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ , $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\|\vec{x}\|_p \geq 0$ ✓

$$\|\vec{x}\|_p = 0 \iff x_1 = \dots = x_n = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}.$$

2. $$\|\lambda \vec{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|\lambda x_k|^p}_{= |\lambda|^p |x_k|^p} \right)^{1/p} = \left( |\lambda|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|\vec{x}\|_p .$$

3. $$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p = \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\underset{\substack{\text{Minkowskische} \\ \text{Ungleichung}}}{\leq} \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

$$= \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p .$$

Fall $p = \infty$. Es seien wiederum $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ , $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\|\vec{x}\|_\infty \geq 0$ ✓

$$\|\vec{x}\|_\infty = 0 \iff \max_{k=1,\dots,n} \overbrace{|x_k|}^{\geq 0} = 0$$

$$\iff |x_1| = \dots = |x_n| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} ,$$

2. $$\|\lambda \vec{x}\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} \overbrace{|\lambda x_k|}^{= |\lambda| |x_k|} = |\lambda| \max_{k=1,\dots,n} |x_k| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|_\infty .$$

3. $\|\vec{x}+\vec{y}\|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k + y_k| \le \max\limits_{k=1,\dots,n} \big( |x_k| + \underbrace{|y_k|}_{\le \max\limits_{l=1,\dots,n} |y_l|} \big)$

$\le \max\limits_{k=1,\dots,n} \big( |x_k| + \|y\|_\infty \big)$

$= \big( \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k| \big) + \|y\|_\infty$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$

Nun zur Aufgabenstellung: Wir zeigen, zunächst, dass für $p \in [1,\infty)$ die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent sind.

Es sei $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Dann existiert ein $l \in \{1,\dots,n\}$ mit der Eigenschaft: $|x_l| = \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k| = \|x\|_\infty$. Damit erhalten wir

$$\|x\|_\infty = |x_l| = \left(|x_l|^p\right)^{1/p} \le \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} = 1 \cdot \|\vec{x}\|_p .$$

Da dies für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt, ist somit $\|x\|_\infty \le C \|\vec{x}\|_p$ $(\vec{x} \in \mathbb{C}^n)$ mit $C = 1$ gezeigt.

Andererseits gilt für $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$:

$$\|\vec{x}\|_p = \Big( \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|x_k|^p}_{\le \max\limits_{l=1,\dots,n} |x_l|} \Big)^{1/p} \le \left( \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}\|_\infty^p \right)^{1/p}$$

$$= \left( n \, \|\vec{x}\|_\infty^p \right)^{1/p} = \underbrace{n^{1/p}}_{=:D=D(n)} \cdot \|x\|_\infty .$$

Da dies ebenfalls für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt, haben wir die Äquivalenz beider Normen gezeigt.

Nun seien $p, q \in [1, \infty]$. Gilt $p = q = \infty$, so ist nichts zu zeigen.
Ist $p = \infty \neq q$, so haben wir die Äquivalenz von $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ schon bewiesen.

Gilt nun $p \neq \infty \neq q$, so existieren, nach dem oben Gezeigten, Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4$ (o.B.d.A. sind diese positiv) mit

$$\|\vec{x}\|_p \leq C_1 \|\vec{x}\|_\infty \leq \underbrace{C_2 C_1}_{>0} \|\vec{x}\|_q \leq C_3 C_2 C_1 \|\vec{x}\|_\infty \leq C_4 C_3 C_2 C_1 \|\vec{x}\|_p,$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

Aus der letzten Ungleichungskette läßt sich die behauptete Äquivalenz ablesen.

8

Es sei $n \in \mathbb{N}$. $(\vec{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{C}^n$ und $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

Wir zeigen: $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x} \iff x_\ell^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_\ell$ für jedes $\ell = 1, \dots, n$.

Beweis „⇒“ Vorausgesetzt wird $\vec{x}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}$.

Es sei $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Wir erhalten

$$0 \le |x_\ell^{(k)} - x_\ell| = \left( |x_\ell^{(k)} - x_\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left( \sum_{\ell=1}^{n} |x_\ell^{(k)} - x_\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daher gilt $x_\ell^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_\ell$ für $\ell = 1, \dots, n$.

„⇐“ Es gilt $x_\ell^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_\ell$ für $\ell = 1, \dots, n$.

Damit gilt dann $0 \le |x_\ell^{(k)} - x_\ell| =: a_\ell^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Wir erhalten daher $0 \le a_\ell^{(k)} \cdot a_\ell^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $\ell = 1, \dots, n$

und $0 \le \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^{(k)} \cdot a_\ell^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgrund der Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ $(x \ge 0)$ folgt schließlich

$$0 \le \left( \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^{(k)} \cdot a_\ell^{(k)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{\ell=1}^{n} |x_\ell^{(k)} - x_\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$