UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

15.06.2007

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

9.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (T)
Skizzieren Sie die folgenden Kurven, und berechnen Sie deren Längen:

a) $\vec{r}(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)^\top \quad (t \in [0, 2\pi])$,

b) $z(\varphi) = \varphi e^{i\varphi} \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$,

c) $\vec{r}(t) = (\sin^3(\frac{1}{3}t)\cos t,\ \sin^3(\frac{1}{3}t)\sin t)^\top \quad (t \in [0, 6\pi])$.

Aufgabe 2 (Ü)

a) Durch die Gleichung
$$x^2(1-y) - y^2(1+y) = 0$$
wird eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve.

b) Die Kurve γ sei gegeben durch
$$\vec{x}(t) = \left(t\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^\top \quad (t \in \mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie die Punkte mit waagrechter und senkrechter Tangente, zeigen Sie, dass γ einen Doppelpunkt besitzt, und skizzieren Sie γ. Geben Sie eine parameterfreie Darstellung an.

Aufgabe 3 (Ü)
Durch die Parameterdarstellung
$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$
ist eine Kurve γ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass γ auf dem durch $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ beschriebenen Kegel liegt.

b) Fertigen Sie eine Skizze der orthogonalen Projektion von γ in die (x, y)-Ebene und von γ selbst an.

c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an γ in einem Kurvenpunkt $\vec{x}(t_0)$.

d) Berechnen Sie die Länge $s = s(t_0)$ von γ bis zum Punkt $\vec{x}(t_0)$.

e) Parametrisieren Sie γ nach der Bogenlänge s. Bestimmen Sie anschließend in einem beliebigen Kurvenpunkt den Tangentenvektor $\vec{t}(s)$, die Länge $\left\|\vec{t}(s)\right\|$ des Tangentenvektors und die Zahl $\left\|\vec{t}\,'(s)\right\|$, d.h. die Krümmung von γ in diesem Kurvenpunkt.

Aufgabe 4 (Ü)

Rollt eine Kreisscheibe auf einer Geraden ab, so beschreibt ein fest mit der Kreisscheibe verbundener Punkt P eine Kurve, die Zykloide genannt wird. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Zykloide, wenn r der Radius des Kreises, c der Abstand des Punktes P vom Kreismittelpunkt und die Gerade die x-Achse ist. Bestimmen Sie desweiteren die Länge eines Zykloidenbogens.

Aufgabe 5 (Ü)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $\vec{v} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Zeigen Sie:

$$\left\| \int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{v}(t)\|\, dt.$$

Aufgabe 6 (Ü)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in I$ und $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $\vec{f}$ ist in x_0 differenzierbar.

b) Jede Komponentenfunktion f_k (mit $k = 1, ..., n$) von $\vec{f} = (f_1, ..., f_n)^\top$ ist in x_0 differenzierbar.

c) $\vec{f}$ ist in x_0 linear approximierbar, d.h. es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit
$$\vec{f}(x_0 + h) = \vec{f}(x_0) + A(h) + \vec{r}(h),$$
wobei für die dadurch definierte Funktion $\vec{r}$ die Beziehung $\|\vec{r}(h)\| = o(|h|)$ gilt.

Aufgabe 7 (T)

Überprüfen Sie, ob (und gegebenfalls wie) sich die folgenden, in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ definierten Funktionen f in $(0, 0)^\top$ stetig fortsetzen lassen:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$, b) $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos xy}{y}$,

c) $f(x, y) = \dfrac{xy}{e^{x^2} - 1}$, d) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Aufgabe 8 (T)
Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$N_c(f) = \big\{(x, y)^\top : f(x, y) = c\big\}$$

die sogenannten Niveaulinien von f. Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen, indem Sie die Niveaulinien N_c für $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ skizzieren:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = xy, \qquad h(x, y) = x^2 - y^2.$$

HINWEISE ZUR 2.ÜBUNGSKLAUSUR

Übungsklausur: Die zweite Übungsklausur zur Vorlesung „Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie“ findet am Samstag, den 7.7.2007, von 9.00 bis 11.00 Uhr statt.

Bitte beachten Sie folgende Hörsaaleinteilung:

Fachrichtung Elektroingenieurwesen	HMO
Fachrichtung Geodäsie	HMO
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben A bis J)	HMU
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben K bis Z)	Gerthsen

Eine vorherige Anmeldung ist für diese Übungsklausur nicht erforderlich!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den 18. Juli 2007, im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am 19. Juli 2007 von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 33 beantwortet.