Höhere Mathematik II

Lösungen zum 9. Übungsblatt

(1)

a) Es gilt $\vec{r}'(t) = (1-\cos t,\ \sin t)^T \qquad (t \in [0,2\pi])$,

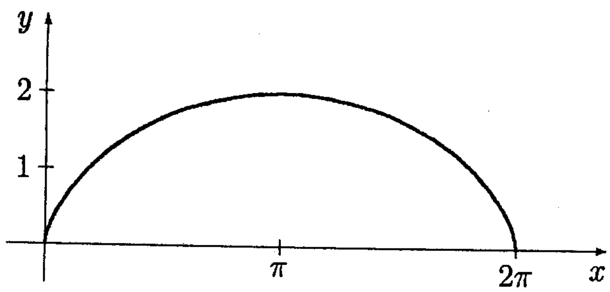
und damit

$$\begin{aligned}\|\vec{r}'(t)\|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 2 - 2\cos t = 2\left(1 - \cos\left(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}t\right)\right) \\ &= 2\left(1 - \cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\tfrac{1}{2}t\right).\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}L(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right| dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\tfrac{1}{2}t\right) dt = \left[-4\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right]_0^{2\pi} = 8.\end{aligned}$$

Skizze:



(vgl. Aufgabe 4).

b) Mit dieser Schreibweise ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi\cos\varphi \\ \varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$, $t \in [0,2\pi]$, gemeint.

Wegen $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\|\vec{r}'(\varphi)\|^2 = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2$$

$$= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi$$

$$= 1+\varphi^2,$$

und damit

$$L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{r}}(\varphi)\|\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2} + \sqrt{1+\varphi^2}}{2}\, d\varphi$$

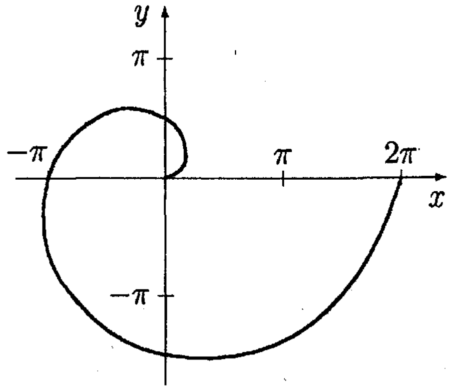
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arcsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2} \Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\operatorname{arcsinh} 2\pi}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}.$$

Skizze:



(Archimedische Spirale)

c) Hier ergibt sich

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3\sin^2(\frac{1}{3}t)\cos(\frac{1}{3}t)\cdot\frac{1}{3}\cos t - \sin^3(\frac{1}{3}t)\sin t \\ 3\sin^2(\frac{1}{3}t)\cos(\frac{1}{3}t)\cdot\frac{1}{3}\sin t + \sin^3(\frac{1}{3}t)\cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2(\frac{1}{3}t)\,[\cos(\frac{1}{3}t)\cos t - \sin(\frac{1}{3}t)\sin t] \\ \sin^2(\frac{1}{3}t)\,[\cos(\frac{1}{3}t)\sin t + \sin(\frac{1}{3}t)\cos t] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2(\frac{1}{3}t)\cos(\frac{4}{3}t) \\ \sin^2(\frac{1}{3}t)\sin(\frac{4}{3}t) \end{pmatrix}.$$

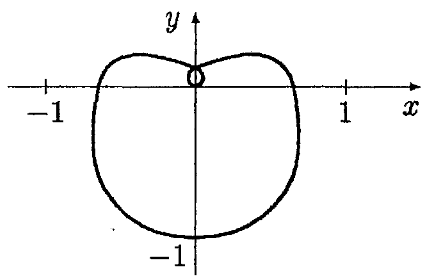
Folglich ist die Länge der Kurve

$$\int_0^{6\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{\sin^4(\tfrac{1}{3}t)\cos^2(\tfrac{4}{3}t) + \sin^4(\tfrac{1}{3}t)\sin^2(\tfrac{4}{3}t)}\,dt$$

$$= \int_0^{6\pi} \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{6\pi} \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt + \int_0^{6\pi}\cos^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt\right]$$

$$= \frac{6\pi}{2} = 3\pi.$$

Skizze:



(Die Kurve wird bei der gegebenen Parametrisierung zweimal durchlaufen, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn.)

② a) Durch $(*)$ $\quad x^2(1-y) - y^2(1+y) = 0$ ist eine parameterfreie Darstellung einer Kurve γ im $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Da es zu $y=1$ kein $x \in \mathbb{R}$ gibt, das $(*)$ erfüllt, ist $(*)$ äquivalent zu

$$(**) \quad x^2 = y^2 \, \frac{1+y}{1-y} \, .$$

Aufgrund der Beschaffenheit der rechten Seite schließen wir $y \in [-1, 1)$.

Setzt man nun $x = ty$ mit $t \in \mathbb{R}$, so erhält man:

$$t^2 y^2 = y^2 \, \frac{1+y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 \left(t^2 - t^2 y - 1 - y \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 \left((t^2-1) - y(t^2+1) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

also $\quad x = 0 \quad$ oder $\quad x = t \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

Für $t = \pm 1$ ist $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit $\quad \gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\[2ex] \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Andere Parameterdarstellungen:

1.) Setze $y = tx$ …, 2. setze $y = t$ ….

Wie sehen dann die Parameterdarstellungen aus?

b) $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\,\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\[2ex] \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

<u>Punkte mit waagrechter Tangente</u>: Bedingung $x_2'(t) = 0$:

$$x_2'(t) = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

Also $x_2'(t) = 0 \iff \dfrac{4t}{(t^2+1)^2} = 0 \iff t = 0.$

Gesuchter Punkt: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>Punkte mit senkrechter Tangente</u>: Bedingung $x_1'(t) = 0$:

$$x_1'(t) = \frac{(3t^2-1)\cdot(t^2+1) - 2t(t^3-t)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{(t^2+1)^2}.$$

Also $x_1'(t) = 0 \iff \dfrac{t^4 + 4t^2 - 1}{(t^2+1)^2} = 0$

$\iff t^4 + 4t^2 - 1 = 0.$

Setze $u = t^2$: $\quad u^2 - 4u + 1 = 0 \implies u_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+1}$

$= -2 \pm \sqrt{5}.$

Also ist $t^2 = u_1 = -2 + \sqrt{5}$, also $t_1 = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$ und $t_2 = -\sqrt{-2+\sqrt{5}}$.

Gesuchte Punkte

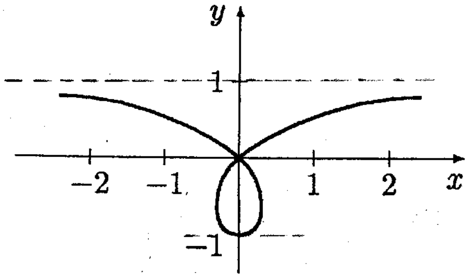
$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22} \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22} \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

<u>Doppelpunkt</u> ist der Punkt $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn es ist

für $t_1 = 1$ und $t_2 = -1$:

$$\vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}(t_2).$$

<u>Skizze:</u>



Eine parameterfreie Darstellung erhält man so:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = ty \quad \text{und} \quad y = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x^2+y^2) = x^2 - y^2.$$

(3)

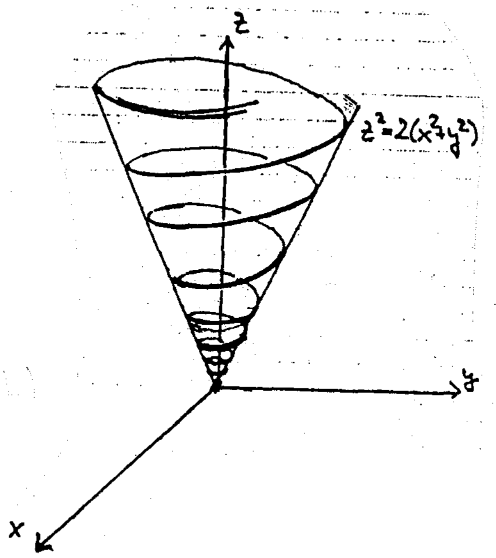
$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

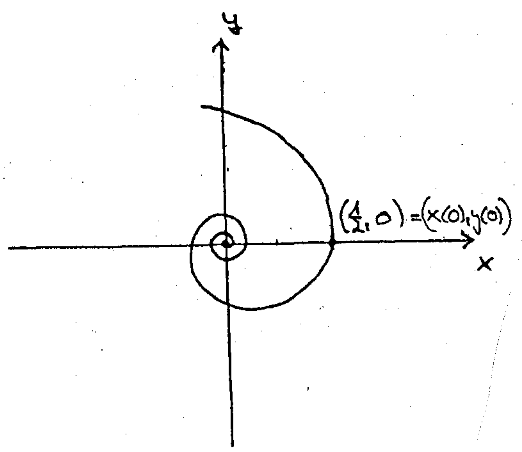
a) $$2x^2(t) + 2y^2(t) - z^2(t)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} e^t \cos t\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} e^t \sin t\right)^2 - \left(\frac{1}{2} e^t \sqrt{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) - \frac{1}{2} e^{2t}$$
$$= \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{2t} = 0.$$

b) Orthogonale Projektion in die (x,y)-Ebene:

$$z=0: \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Skizzen:





c) Tangente an $\vec{x}(t_0)$:

$$T: \quad \vec{t}(\lambda) = \vec{x}(t_0) + \lambda\, \vec{x}\,'(t_0) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Es ist $\vec{x}\,'(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Also

$$T: \quad \vec{t}(\lambda) = \frac{1}{2} e^{t_0} \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \frac{1}{2} e^{t_0} \begin{pmatrix} \cos t_0 - \sin t_0 \\ \sin t_0 + \cos t_0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

d)

$$s = s(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \| \vec{x}\,'(t) \| \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{t_0} \sqrt{\frac{1}{4} e^{2t} \left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 2 \right]} \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{t_0} e^t \, dt = e^{t_0}.$$

e) Es ist $s = e^t \Rightarrow t = \ln s \quad (s > 0)$.

Einsetzen in Parameterdarstellung ergibt

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Bigg|_{t = \ln s}$$

$$= \frac{1}{2} s \begin{pmatrix} \cos \ln s \\ \sin \ln s \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \vec{X}(s) \qquad (s > 0).$$

Tangentenvektor in einem Kurvenpunkt $\vec{x} = \vec{x}(s)$ ist:

$$\vec{t}(s) = \vec{x}'(s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\ln s) - s \cdot \sin(\ln s) \cdot \frac{1}{s} \\ \sin(\ln s) + s \cdot \cos(\ln s) \cdot \frac{1}{s} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\ln s) - \sin(\ln s) \\ \sin(\ln s) + \cos(\ln s) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Der Tangentenvektor hat die Länge

$$\| \vec{t}(s) \| = \frac{1}{2} \left[(\cos(\ln s) - \sin(\ln s))^2 + (\sin(\ln s) + \cos(\ln s))^2 + 2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 (\cos^2(\ln s) + \sin^2(\ln s)) + 2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 .$$

Krümmung von γ!

$$\| \vec{t}'(s) \| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\ln s) \cdot \frac{1}{s} - \cos(\ln s) \cdot \frac{1}{s} \\ \cos(\ln s) \cdot \frac{1}{s} - \sin(\ln s) \cdot \frac{1}{s} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2s} \left((\sin(\ln s) + \cos(\ln s))^2 + (\cos(\ln s) - \sin(\ln s))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\, s}$$

(4)

Eine Parameterdarstellung der Zykloide ist gegeben durch

$$x(t) = rt - c\sin t$$
$$y(t) = r - c\cdot\cos t \qquad (t\in\mathbb{R})$$

<u>Zur Begründung</u>: Durch $\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} rt \\ r \end{pmatrix}$ wird die Kurve des Kreismittelpunktes M parametrisiert.

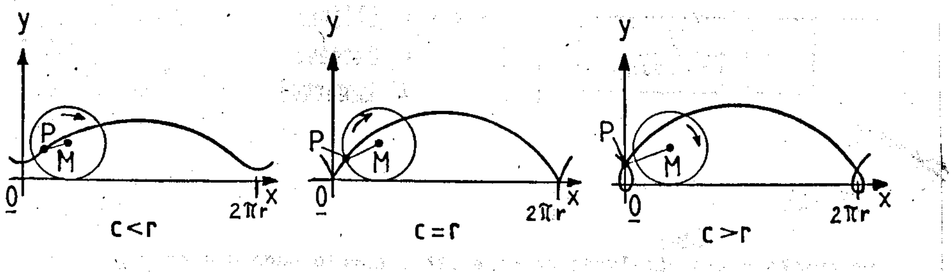
Der Zusatz $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -c\sin t \\ -c\cos t \end{pmatrix}$ beschreibt die Drehung des Punktes P um M, wobei zur Zeit $t=0$ der Kreismittelpunkt auf der y-Achse liegt und der Punkt P senkrecht darunter (vgl. Skizze).

Der Parameter t heißt <u>Wälzwinkel</u>; man unterscheidet

$0<c<r$: gestreckte Zykloide

$c=r$: gewöhnliche Zykloide

$c>r$: verschlungene Zykloide



Die Länge eines Zykloidenbogens $(0 \le t \le 2\pi)$ ist

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - c\cos t)^2 + (c \sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \underbrace{\cos t}_{= 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r-c)^2 + 4rc \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(r-c)^2 + 4rc\sin^2\tau}\, d\tau$$

Für $r \neq c$ ist dies ein elliptisches Integral, welches nicht durch elementare Funktionen aufgelöst werden kann.

Im Falle $r = c$ erhält man die Länge L eines Bogens der gewöhnlichen Zykloide elementar:

$$L = 4r \int_0^{\pi} \sin\tau\, d\tau = 4r\left[-\cos\tau\right]_0^{\pi} = 8r.$$

(5) Es sei $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $\vec{v} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stetig.

Dann ist auch die Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u(t) = \|\vec{v}(t)\|$ stetig.

Ist $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\left(\int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_a^b v_n(t)\, dt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b v_k(t) \cdot w_k \, dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} v_k(t) \cdot w_k \right) dt$$

$$= \int_a^b \vec{v}(t) \cdot \vec{w} \, dt .$$

Daher erhalten wir

$$\left| \left(\int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right) \cdot \vec{w} \right| = \left| \int_a^b \vec{v}(t) \cdot \vec{w} \, dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |\vec{v}(t) \cdot \vec{w}| \, dt \underset{CSU}{\leq} \int_a^b \underbrace{\|\vec{v}(t)\|}_{\text{stetig}} \cdot \|\vec{w}\| \, dt$$

$$= \|\vec{w}\| \cdot \int_a^b \|\vec{v}(t)\| \, dt .$$

Setzt man $\vec{w} = \int_a^b \vec{v}(t)\, dt$, so gilt:

$$\left\| \int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right\|^2 = \left(\int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right) \cdot \left(\int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right)$$

$$\leq \left\| \int_a^b \vec{v}(t)\, dt \right\| \cdot \int_a^b \|\vec{v}(t)\|\, dt \, ,$$

und daraus die Behauptung.

⑥ Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\vec{f}: I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

a) $\Rightarrow$ b) Ist $\vec{f}$ in $x_0 \in I$ db, so existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(x_0+h) - \vec{f}(x_0)}{h} = \vec{f}'(x_0) \in \mathbb{R}^n ,$$

d.h. $$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(x_0+h) - \vec{f}(x_0) - \vec{f}'(x_0)\cdot h}{h} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^n$$

Da die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz ist, folgt damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_k(x_0+h) - f_k(x_0) - h\cdot(\vec{f}'(x_0))_k}{h} = 0 \quad (\in \mathbb{R})$$

für $k = 1, \ldots, n$. Dabei bezeichnet $(\vec{f}'(x_0))_k$ die k-te Komponente von $\vec{f}'(x_0)$.
Damit ist $f_k : I \to \mathbb{R}$ in x_0 db, und es gilt

$$f_k'(x_0) = (\vec{f}'(x_0))_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

b) $\Rightarrow$ c) Es sei nun jede Komponentenfunktion von $\vec{f}$ in x_0 db.

Definiert man $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ durch

$$A(h) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix} \cdot h$$

und $\vec{r}$ durch

$$\vec{r}(h) = \vec{f}(x_0+h) - f(x_0) - A(h) ,$$

wo immer dies möglich ist,

so gilt $$\vec{f}(x_0+h) = f(x_0) + A(h) + \vec{r}(h)$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\vec{r}(h)\|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left\| \vec{f}(x_0+h) - \vec{f}(x_0) - \begin{pmatrix} f_1'(x_0)\cdot h \\ \vdots \\ f_n'(x_0)\cdot h \end{pmatrix} \right\|}{h}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(komponentenweise Konvergenz)}}}{=} 0 \quad ,$$

also $\|\vec{r}(h)\| = o(|h|)$.

c) $\Rightarrow$ $\vec{a}$, Ist $\vec{f}$ in x_0 linear approximierbar, so existiert eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$A(h) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot h \qquad (\text{dabei sind } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}).$$

Nun gilt

$$\vec{f}(x_0+h) - f(x_0) - A(h) = \vec{r}(h) \quad ,$$

und damit

$$\left\| \frac{\vec{f}(x_0+h) - \vec{f}(x_0) - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\cdot h}{h} \right\| = \frac{\|\vec{r}(h)\|}{|h|}$$

Wegen $\|\vec{r}(h)\| = o(|h|)$ existiert somit der Limes, und damit ist $\vec{f}$ in x_0 differenzierbar.

(7)

f ist stetig fortsetzbar in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, wenn $c = \lim\limits_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y)$

existiert. Die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ c & , \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

a) Es ist $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \dfrac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}$

$$= \sqrt{x^2+y^2+1}+1,$$

und daher

$$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y) = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2.$$

Also $$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & , \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 2 & , \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

b) Wir verwenden die Potenzreihendarstellung des Cosinus und erhalten

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{y} = \frac{1-\left(1-\frac{(xy)^2}{2!}+\frac{(xy)^4}{4!}-\ldots\right)}{y}$$

$$= \frac{x^2y}{2!} - \frac{x^4y^3}{4!} + \ldots$$

und daher $\lim\limits_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y) = 0$.

Die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ist daher gegeben durch

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{y}, & \text{falls } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Es ist $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1} = \dfrac{xy}{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\dots\right)-1}$

$$= \frac{y}{x+\frac{x^3}{2!}+\dots}.$$

Wähle Folge $\begin{pmatrix}\tilde{x}_n\\ \tilde{y}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/n\\ 1/n\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 1$.

Wählt man die Folge $\begin{pmatrix}\tilde{x}_n\\ \tilde{y}_n^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/n\\ 1/n^2\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,

so ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{\tilde{y}}_n) = 0$.

Folglich existiert der Grenzwert nicht, und f läßt sich nicht stetig fortsetzen.

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Wir führen Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{mit } r \geq 0, \; \varphi\in[0,2\pi).$$

Dann ist

$$f(x,y)\Big|_{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}} = \frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}$$

$$= r\,(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\,.$$

Wir erhalten daher

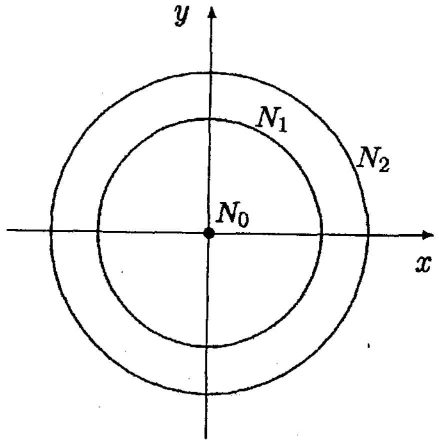
$$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}_{\text{beschränkt}} = 0\,.$$

Daher ist $\tilde{f}$ gegeben durch

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

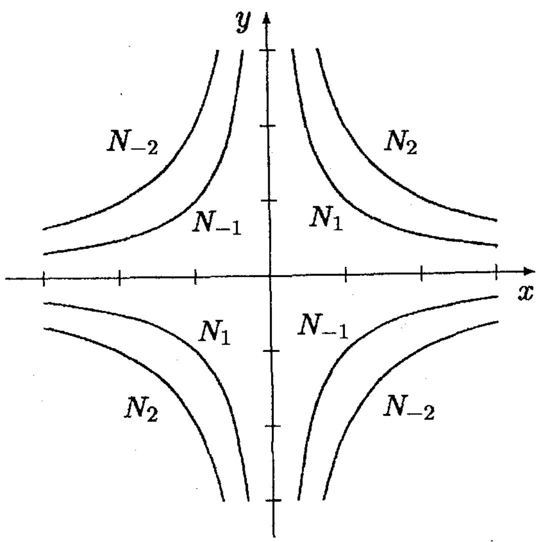
(8) • Die Niveaulinie $N_c(f)$ ergibt sich aus der Gleichung $f(x,y) = c$, also $x^2 + y^2 = c$.

Für $c < 0$ erhalten wir die leere Menge , für $c = 0$ nur den Nullpunkt , und für $c > 0$ einen Kreis um $\binom{0}{0}$ mit Radius $\sqrt{c}$. Dies ergibt die folgende Skizze , wobei der kleinere Kreis den Radius 1 hat:

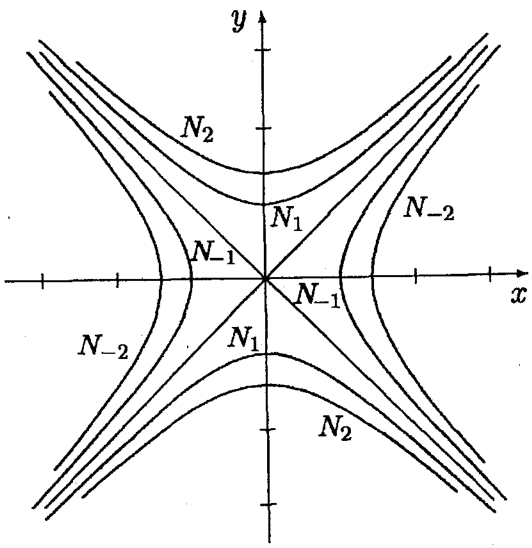


• Die Gleichung $xy = c$ hat für $c = 0$ die Lösungsmenge $\left\{ \binom{x}{y} : x = 0 \text{ oder } y = 0 \right\}$.

Für $c \neq 0$ erhält man das Schaubild der Funktion $y = c/x$, die Niveaulinien sind also Hyperbeln .
Die Skizze sieht wie folgt aus , wobei N_0 aus den beiden Achsen besteht:



Aus h erhalten wir die Gleichung $y^2 = c + x^2$, also $y = \pm\sqrt{c+x^2}$. Es ergibt sich das folgende Bild, wobei N_0 aus den beiden Winkelhalbierenden besteht:



<u>Bemerkung:</u> Wegen $h(x,y) = (y-x)(y+x)$ erhalten wir das gleiche Bild wie bei der Funktion g, allerdings gedreht und mit anderen Längen.