UNIVERSITÄT KARLSRUHE 22.06.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

10.Übungsblatt - SS 2007

In den folgenden Aufgaben sei stets $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1 (Ü)

Durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x-y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)^\top \neq (0,0)^\top \\ c & \text{in } (0,0)^\top \end{cases}$$

ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie c so, dass f stetig in $(0,0)^\top$ ist.

b) Berechnen Sie $D_1 f(0,0)$ sowie $D_2 f(0,0)$, und zeigen Sie anhand der Definition der Differenzierbarkeit, dass f in $(0,0)^\top$ nicht differenzierbar ist.

c) Bestimmen Sie für jede Richtung $\vec{v} = (v_1, v_2)^\top \neq (0,0)^\top$, für welche dies möglich ist, die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(0,0)$.

d) Für welche $\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ ist $D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$? Bestätigen Sie nochmals, dass f in $(0,0)^\top$ nicht differenzierbar ist.

e) Berechnen Sie $D_1 f(x,y)$ und $D_2 f(x,y)$ für alle Stellen $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\}$. Sind die partiellen Ableitungen in $(0,0)^\top$ stetig?

Aufgabe 2 (Ü)

Die Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei in $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar, und für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei

$$D_{\vec{u}} \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad D_{\vec{v}} \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $D_{\vec{w}} \vec{f}(\vec{x}_0)$ für $\vec{w} = (-1,1)^\top$.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix (bzgl. der kanonischen Basen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$) der linearen Abbildung $\vec{L}$, die die folgende Bedingung erfüllt:

$$\lim_{\vec{v} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{L}(\vec{v})}{\|\vec{v}\|} = \vec{0}.$$

c) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die erste Komponentenfunktion von $\vec{f}$. Für welche Richtung $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ ist $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ maximal, für welche minimal, wann verschwindet diese Richtungsableitung?

Aufgabe 3 (Ü)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sinh x - \sinh y}{x - y} & \text{falls } x \neq y, \\ \cosh x & \text{für } x = y. \end{cases}$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f in $(0, 0)^\top$.

Aufgabe 4 (T)

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w, x, y, z) = x^y$.

b) $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(x) = (\cos x, e^x \arctan x, 1)^\top$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^3 z + \cosh(xy \sin z)$.

d) $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \ln((x^2+1)(z^2+1)) \\ \sqrt{1 + \cosh(xy)} \\ \arcsin\left(\frac{1}{2} e^{-z^2}\right) \end{pmatrix}$.

e) $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ \sin(xy^2) \\ e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (Ü)

Bestimmen Sie auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ alle rotationssymmetrischen Lösungen der Gleichung $\Delta f = 0$. (Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ heißt rotationssymmetrisch, falls $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ gilt.)

Aufgabe 6 (T)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien allesamt differenzierbar. Zeigen Sie:

a) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$.

b) $\nabla \times (v\vec{w}) = v(\nabla \times \vec{w}) + (\nabla v) \times \vec{w}$.

c) $\nabla^\top (v\vec{w}) = v(\nabla^\top \vec{w}) + (\nabla v)^\top \vec{w}$.

Aufgabe 7 (T)
Es seien $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\nabla(\vec{v}^\top) = J_{\vec{v}}^\top$.

b) $\nabla(\vec{v}^\top \vec{w}) = J_{\vec{v}}^\top \vec{w} + J_{\vec{w}}^\top \vec{v}$.

c) $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\nabla \times \vec{v})^\top \vec{w} - (\nabla \times \vec{w})^\top \vec{v}$.

Dabei bezeichnet $J_{\vec{v}}$ bzw. $J_{\vec{w}}$ die Jacobimatrix von $\vec{v}$ bzw. $\vec{w}$.

Aufgabe 8 (T)
Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, -xz)^\top, \qquad \vec{g}(x,y,z) = (-y, x, 0)^\top.$$

Berechnen Sie $\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}), \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g})$ und $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g})$.

HINWEISE ZUR 2.ÜBUNGSKLAUSUR

Übungsklausur: Die zweite Übungsklausur zur Vorlesung „Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie“ findet am Samstag, den 7.7.2007, von 9.00 bis 11.00 Uhr statt.

Bitte beachten Sie folgende Hörsaaleinteilung:

Fachrichtung Elektroingenieurwesen	HMO
Fachrichtung Geodäsie	HMO
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben A bis J)	HMU
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben K bis Z)	Gerthsen

Eine vorherige Anmeldung ist für diese Übungsklausur nicht erforderlich!

Nach der Klausur:
Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den 18. Juli 2007, im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am 19. Juli 2007 von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 33 beantwortet.