Höhere Mathematik II

Lösungen zum 10. Übungsblatt

(1)

a) $c = \lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} f(x,y) \overset{\substack{\text{Polarkoordinaten} \\ \downarrow}}{=} \lim_{r \to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi \cdot r(\cos\varphi - \sin\varphi)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r \cos\varphi \sin\varphi (\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 =: f(0,0).$$

In allen Punkten $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ ist f als Quotient der stetigen Funktionen $xy(x-y)$ und x^2+y^2 (wobei der Nenner x^2+y^2 dort immer ungleich 0 ist) stetig.

b) $$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Wäre f in $(0,0)$ differenzierbar, so müsste gelten:

$$\lim_{\binom{h}{k}\to\binom{0}{0}} \frac{f(h,k) - f(0,0) - D_1 f(0,0)\cdot h - D_2 f(0,0)\cdot k}{\left\| \binom{h}{k} \right\|} = 0.$$

Es ist

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - D_1 f(0,0)\cdot h - D_2 f(0,0)\cdot k}{\left\| \binom{h}{k} \right\|}$$

$$= \frac{hk\frac{(h-k)}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk(h-k)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Speziell für $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/n \\ 1/n \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) - f(0,0) - D_1 f(0,0)\cdot\frac{2}{n} - D_2 f(0,0)\cdot\frac{1}{n}}{\left\| \begin{pmatrix} 2/n \\ 1/n \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)}{\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t-0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} t^2 v_1 v_2 \frac{t(v_1-v_2)}{t^2(v_1^2+v_2^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} v_1 v_2 \frac{v_1-v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_1 v_2 \frac{v_1-v_2}{v_1^2+v_2^2}$$

d) Nach c) gilt $D_{\vec{v}} f(0,0) = v_1 v_2 \frac{v_1-v_2}{v_1^2+v_2^2} \overset{\|\vec{v}\|=1}{=} v_1 v_2 (v_1 - v_2)$

$$\overset{!}{=} \nabla f(0,0)\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} D_1 f(0,0) \\ D_2 f(0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{b)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Also $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ oder $v_1 = v_2$.

Daher gilt nur für $\vec{v} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

die Gleichheit $D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$.

Wäre f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ differenzierbar, so würde diese Gleichung für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ gelten.

c) Nach der Quotientenregel gilt:

$$D_1 f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2xy - y^2) - (xy(x-y))\, 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2y^2 + 2xy^3 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(x^2 - 2xy) - (x^2y - xy^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3y - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Wären sowohl $D_1 f$ als auch $D_2 f$ in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stetig, so wäre f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ differenzierbar; im Widerspruch zu b).

Also ist mindestens eine partielle Ableitung $D_j f$ in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unstetig.

Betrachte $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \end{pmatrix}$: Es gilt zwar $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

aber

$$D_1 f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2 y_n^2 + 2 x_n y_n^3 - y_n^4}{(x_n^2 + y_n^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = D_1 f(0,0) .$$

$D_1 f$ (und analog $D_2 f$) ist in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unstetig.

(2)

a) $\vec{f}$ db in $\vec{x_0}$. Nach einem Satz der Vorlesung gilt dann:

$$D_{\vec{w}}\vec{f}(\vec{x_0}) = \vec{f}'(\vec{x_0})\,\vec{w} = \vec{f}'(\vec{x_0})\,(-\vec{u}-\vec{v})$$

$$= -\vec{f}'(\vec{x_0})\,\vec{u} - \vec{f}'(\vec{x_0})\,\vec{v}$$

$$\underset{\text{Satz}}{=} -D_{\vec{u}}\vec{f}(\vec{x_0}) - D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

b) Gemäß Vorlesung ist die Abbildungsmatrix der $\vec{f}$ approximierenden linearen Abbildung $\vec{L}$ die Matrix

$$\vec{f}'(\vec{x_0}) = \underbrace{\left(D_1\vec{f}(\vec{x_0}) \;,\; D_2\vec{f}(\vec{x_0}) \right)}_{3\times 2-\text{Matrix}}$$

$$= \left(D_{\vec{e_1}}\vec{f}(\vec{x_0}) \;,\; D_{\vec{e_2}}\vec{f}(\vec{x_0}) \right).$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v} \quad , \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\vec{v}.$$

Also $\vec{f}'(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

c) Es sei f die erste Komponentenfunktion von $\vec{f} = \begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$.

Da $\vec{f}$ in $\vec{x_0}$ db ist, gilt dies auch für f.

Es ist, vgl. b), $\nabla f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Nun gilt $$D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) \underset{f \text{ db}}{=} \nabla f(x_0)\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{a}$$

$$= \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}_{=\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\| \vec{a} \|}_{=1} \cdot \cos \sphericalangle \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a} \right)$$

$$= \sqrt{5} \cos \sphericalangle \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a} \right)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{5} & \text{für } \cos \sphericalangle(\ldots) = 1, \text{ also } \sphericalangle(\ldots) = 0, \text{ d.h. } \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{5} & \text{für } \cos \sphericalangle(\ldots) = -1, \text{ also } \sphericalangle(\ldots) = \pi, \text{ d.h. } \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{für } \cos \sphericalangle(\ldots) = 0, \text{ also } \sphericalangle(\ldots) = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ d.h. } \vec{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(3) $$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t-0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sinh t - \sinh 0}{t-0} - \cosh(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sinh t}{t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sinh t - t}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{3!}t + \frac{1}{5!}t^3 + \dots\right) = 0$$

Analog: $\frac{df}{dy}(0,0) = 0$

Für $x \neq y$ ist $\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{(\cosh x)(x-y) - (\sinh x - \sinh y)}{(x-y)^2}$,

und damit

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{df}{dx}(t,0) - \frac{df}{dx}(0,0)}{t-0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\cosh t)\cdot t - \sinh t}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(t + \frac{1}{2!}t^3 + \frac{1}{4!}t^5 + \dots\right) - \left(t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots\right)}{t^3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) t^2 + \dots \right) = \frac{1}{3}$$

Analog: $\frac{d^2 f}{dy^2}(0,0) = \frac{1}{3}$. (vgl. Symmetrie der Funktion)

$$\frac{d^2 f}{dy\, dx}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{df}{dx}(0,t) - \frac{df}{dx}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-t + \sinh t - 0}{t^3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 + \dots}{t^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Analog: $\frac{d^2 f}{dx\, dy}(0,0) = \frac{1}{6}$.

④

a) $$f(w,x,y,z) = x^y = e^{\ln x \cdot y}$$

$$f'(w,x,y,z) = \left(0,\ y\cdot x^{y-1},\ \underbrace{\ln x\ e^{\ln x \cdot y}}_{\ln x\ x^y},\ 0\right)$$

b) $$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ e^x \arctan x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ e^x \arctan x + e^x \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$f(x,y,z) = (x^2+y^2)^3 z + \cosh(xy \sin z)$$

$$f'(x,y,z) = (D_1 f,\ D_2 f,\ D_3 f)_{|(x,y,z)}$$

mit $$D_1 f(x,y,z) = z\cdot 3\cdot (x^2+y^2)^2 \cdot 2x + \sinh(xy \sin z)\cdot y \cdot \sin z$$

$$D_2 f(x,y,z) = z\cdot 3\cdot (x^2+y^2)^2 \cdot 2y + \sinh(xy \sin z)\cdot x\cdot \sin z$$

$$D_3 f(x,y,z) = (x^2+y^2)^3 + \sinh(xy \sin z)\cdot x\cdot y \cos z$$

d) $$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln[(x^2+1)(z^2+1)] \\ \sqrt{1+\cosh(xy)} \\ \arcsin\left(\frac{1}{2} e^{-t^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{(z^2+1)\,2x}{(x^2+1)\,(z^2+1)} & 0 & \frac{2z}{(z^2+1)} \\ \frac{1}{2}\,\frac{\sinh(xy)\cdot y}{\sqrt{1+\cosh(xy)}} & \frac{1}{2}\,\frac{\sinh(x\cdot y)\cdot x}{\sqrt{1+\cosh(xy)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-z)\,e^{-z^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}e^{-2z^2}}} \end{pmatrix}$$

e)

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \sin(xy^2) \\ e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \cos(xy^2)\;y^2 & \cos(xy^2)\;x\cdot 2y \\ e^{e^{x+y}}\cdot e^{x+y} & e^{e^{x+y}}\cdot e^{x+y} \end{pmatrix}$$

(5)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ eine rotationssymmetrische Funktion...

In diesem Fall existiert eine Funktion $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$f(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|) \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})$.

Ist zusätzlich die Funktion f zweimal differenzierbar, so gilt dies auch für die Funktion F.

Nun sei f zweimal differenzierbar. Wir erhalten für $k = 1, \ldots, n$:

$$\frac{df}{dx_k}(\vec{x}) = F'(\|\vec{x}\|) \cdot \frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})$$

und

$$\frac{d^2 f}{dx_k^2}(\vec{x}) = \left(F''(\|\vec{x}\|) \cdot \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|} + F'(\|\vec{x}\|) \right) \frac{1}{\|\vec{x}\|}$$

$$- F'(\|\vec{x}\|) \cdot x_k \cdot \frac{x_k}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$= F''(\|\vec{x}\|) \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + F'(\|\vec{x}\|) \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^3} \right)$$

$(\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

Dies führt auf die Gleichung

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_k^2}(\vec{x})$$

$$= F''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} F'(\|\vec{x}\|).$$

Nun sei f eine rotationssymmetrische Lösung der Gleichung $\Delta f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Da f rotationssymmetrisch ist, existiert eine Funktion $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Desweiteren ist F zweimal differenzierbar, da insbesondere die partielle Ableitung $\frac{d^2 f}{dx_1^2}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert.

(Beachte $F(r) = f(r, 0, \dots, 0) \qquad (r \in (0,\infty))$.)

Gemäß dem anfangs Gezeigten gilt

$$0 = \Delta f(\vec{x}) = F''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} F'(\|\vec{x}\|) \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Setzt man $r = \|x\|$, so löst F' die lineare Dgl. 1. Ordnung

$$0 = F'' + \frac{n-1}{r} F'(r).$$

Die Lösungen sind gegeben durch $F'(r) = c \cdot r^{1-n} \qquad (r \in (0,\infty))$.

Im Falle $n = 2$ ist also

$$F(r) = a \ln r + b \qquad (a, b \in \mathbb{R}),$$

und im Falle $n = 3$ gilt

$$F(r) = a\, r^{2-n} + b \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Da diese Funktionen rotationssymmetrische Lösungen der Gleichung $\Delta f = 0$ vermitteln, erhalten wir mit der Funktion

$$N_0(\vec{x}) = \begin{cases} \ln \|\vec{x}\| & , \text{ im Fall } n = 2 \\ \dfrac{1}{\|\vec{x}\|^{n-2}} & , \text{ im Fall } n > 2 \end{cases}$$

der folgende Satz.

Die Gesamtheit aller rotationssymmetrischen Lösungen der Gleichung $\Delta f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

$$\{ f : \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R} \mid f = a N_0 + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \} .$$

Insbesondere erhält man:

Jede rotationssymmetrische Lösung der Gleichung $\Delta f = 0$ in $\mathbb{R}^n$ ist konstant.

⑥ a) $\nabla(fg) = \begin{pmatrix} D_1(fg) \\ D_2(fg) \\ D_3(fg) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_1 f)g + f(D_1 g) \\ (D_2 f)g + f(D_2 g) \\ (D_3 f)g + f(D_3 g) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} D_1 f \\ D_2 f \\ D_3 f \end{pmatrix} \cdot g + f \begin{pmatrix} D_1 g \\ D_2 g \\ D_3 g \end{pmatrix}$

$= (\nabla f) g + f (\nabla g)$

b) $\nabla \times (v \vec{w}) = \begin{pmatrix} D_2(v w_3) - D_3(v w_2) \\ D_3(v w_1) - D_1(v w_3) \\ D_1(v w_2) - D_2(v w_1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (D_2 v) w_3 + v(D_2 w_3) - (D_3 v) w_2 - v(D_3 w_2) \\ (D_3 v) w_1 + v(D_3 w_1) - (D_1 v) w_3 - v(D_1 w_3) \\ (D_1 v) w_2 + v(D_1 w_2) - (D_2 v) w_1 - v(D_2 w_1) \end{pmatrix}$

$= v \begin{pmatrix} D_2 w_3 - D_3 w_2 \\ D_3 w_1 - D_1 w_3 \\ D_1 w_2 - D_2 w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (D_2 v) w_3 - (D_3 v) w_2 \\ (D_3 v) w_1 - (D_1 v) w_3 \\ (D_1 v) w_2 - (D_2 v) w_1 \end{pmatrix}$

$= v (\nabla \times \vec{w}) + (\nabla v) \times \vec{w}$

c) $\nabla^T(v\vec{w}) = D_1(vw_1) + D_2(vw_2) + D_3(vw_3)$

$= \underline{(D_1 v)w_1} + v(D_1 w_1) + \underline{(D_2 v)w_2} + v(D_2 w_2) + \underline{(D_3 v)w_3} + v(D_3 w_3)$

$= (\nabla v)^T \vec{w} + v(\nabla^T \vec{w})$

(7)

a) $\nabla(\vec{v}^T) = \nabla(v_1, v_2, v_3) = (\nabla v_1, \dots, \nabla v_3)$

$$= \begin{pmatrix} D_1 v_1 & D_1 v_2 & D_1 v_3 \\ D_2 v_1 & D_2 v_2 & D_2 v_3 \\ D_3 v_1 & D_3 v_2 & D_3 v_3 \end{pmatrix}$$

$$= (J_{\vec{v}})^T$$

b) $\nabla(\vec{v}^T \vec{w}) = \nabla\left(\sum_{j=1}^{3} v_j w_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \nabla(v_j w_j)$

$$\underset{\text{Aufgabe 6 a)}}{=} \sum_{j=1}^{3} (\nabla v_j) w_j + v_j (\nabla w_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} D_1 v_j \\ D_2 v_j \\ D_3 v_j \end{pmatrix} w_j + v_j \begin{pmatrix} D_1 w_j \\ D_2 w_j \\ D_3 w_j \end{pmatrix}$$

$$= \nabla(\vec{v}^T)\, \vec{w} + \nabla(\vec{w}^T)\, \vec{v}$$

$$\underset{a)}{=} J_{\vec{v}}^T \vec{w} + J_{\vec{w}}^T \vec{v}.$$

c) $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$

$$= D_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + D_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + D_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$\begin{aligned} = {} & (D_1 v_2) w_3 - (D_1 v_3) w_2 + v_2 (D_1 w_3) - v_3 (D_1 w_2) \\ & + (D_2 v_3) w_1 - (D_2 v_1) w_3 + v_3 (D_2 w_1) - v_1 (D_2 w_3) \\ & + (D_3 v_1) w_2 - (D_3 v_2) w_1 + v_1 (D_3 w_2) - v_2 (D_3 w_1) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix}^T \cdot \vec{w} \quad + \begin{pmatrix} D_3 w_2 - D_2 w_3 \\ D_1 w_3 - D_3 w_1 \\ D_2 w_1 - D_1 w_2 \end{pmatrix}^T \vec{v}$$

$$= (\nabla \times \vec{v})^T \vec{w} - (\nabla \times \vec{w})^T \vec{v} . = (\mathrm{rot}\, \vec{v}) \cdot \vec{w} - (\mathrm{rot}\, \vec{w}) \cdot \vec{v} .$$

⑧ $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ -xz \end{pmatrix}$, $\vec{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\vec{f}\cdot\vec{g})(x,y,z) = (\vec{f}^T\vec{g})(x,y,z) = -x^2y + xy^2$.

Damit $\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2xy + y^2 \\ 2xy - x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(\vec{f}\times\vec{g})(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\cdot 0 + xz\cdot x \\ -xz(-y) - x^2\cdot 0 \\ x^2 x - y^2(-y) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x^2z \\ xyz \\ x^3+y^3 \end{pmatrix}$

Also $\operatorname{div}(\vec{f}\times\vec{g})(x,y,z) = \nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g})(x,y,z)$

$= 2xz + xz + 0 = 3xz$

$\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g})(x,y,z) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2z \\ xyz \\ x^3+y^3 \end{pmatrix} = \nabla\times\begin{pmatrix} x^2z \\ xyz \\ x^3+y^3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3y^2 - xy \\ x^2 - 3x^2 \\ yz - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3y-x) \\ -2x^2 \\ yz \end{pmatrix}$