UNIVERSITÄT KARLSRUHE 29.06.2007
Institut für Analysis

Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

11.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (T)
Die Funktionen $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$\psi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z \quad \text{und} \quad \vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $\psi(\vec{\varphi}(x^3 - 2y^2, 2x + y))$.

a) Bestimmen Sie $f(1, 1)$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(1, 1)$ mit Hilfe der Kettenregel.

c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = f(x, y)$ definierte Fläche im Punkt $(1, 1, f(1, 1))^\top$.

Aufgabe 2 (Ü)
Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar, und v sei definiert durch

$$v(r, \varphi) = u(r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

a) Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ bzw. $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ durch die partiellen Ableitungen von u aus.

b) Zeigen Sie, dass für $(x, y)^\top = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)^\top$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi)$$

gilt.

Aufgabe 3 (T)
Geben Sie für folgende Funktionen jeweils das Taylor-Polynom 2.Grades um die Entwicklungsstelle $(x_0, y_0)^\top$ an:

a) $f(x, y) = \cos(xy) + xe^{y-1}, \quad (x_0, y_0)^\top = (\pi, 1)^\top,$

b) $g(x,y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$, $(x_0, y_0)^\top = (1, \pi)^\top$,

c) $h(x,y) = x^y$, $(x_0, y_0)^\top = (1, 3)^\top$,

d) $i(x,y) = \arctan(xy)$ $(x_0, y_0)^\top = (1, 1)^\top$.

Nutzen Sie Teil c), um $1.02^{3.01}$ näherungsweise zu berechnen.

Aufgabe 4 (Ü)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom T_n der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{1+x+y}$ im Nullpunkt. Für welche $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ konvergiert $T_n(x,y) \to f(x,y)$ für $n \to \infty$?

Aufgabe 5 (T)
Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktionen f, g und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und geben Sie die Art der Extrema an:

a) $f(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$,

b) $g(x,y) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - e^y)^2$,

c) $h(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.

Aufgabe 6 (Ü)
Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ alle Stellen lokaler Extrema und relativer Randextrema (sowie den jeweils vorliegenden Typ des Extremums) auf den angegebenen Definitionsmengen.

a) $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$, $D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq -1\right\}$,

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$, $D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 36\right\}$.

Aufgabe 7 (T)
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 0, -1)^\top$ nach z auflösbar ist.
Berechnen Sie für $z = g(x,y)$ den Gradienten an der Stelle $(0,0)^\top$.

Aufgabe 8 (Ü)
Zeigen Sie, dass nahe $(x_0, y_0)^\top = (0,0)^\top$ durch das Gleichungssystem

$$u^2 + ve^{-u} + xu = 1$$
$$xy + yv + \frac{u}{v} = x$$

zwei Funktionen $u = u(x,y)$ sowie $v = v(x,y)$ eindeutig bestimmt sind.
Berechnen Sie u_x, u_y, v_x sowie v_y in $(0,0)^\top$.

Aufgabe 9 (Ü)

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z - 1)^2 + (y - z)^2 \qquad ((x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3).$$

a) Bestätigen Sie, dass durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ im Punkt $(1, 0, 0)^\top$ implizit eine stetig differenzierbare Funktion $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist, die

$$\vec{h}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(h_1(z), h_2(z), z) = 0$$

für alle $z \in \mathbb{R}$ erfüllt. Bestimmen Sie $\vec{h}'(0)$.

b) Skizzieren Sie die Menge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0 \right\}.$$