Höhere Mathematik II

Lösungen zum 11. Übungsblatt

(1)

Es sei $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{\varphi}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+2y \\ xy \\ y^2-x^2 \end{pmatrix},$$

$\vec{\eta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{\eta}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 2y^2 \\ 2x + y \end{pmatrix},$$

$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z,$$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f = \psi \circ \vec{\varphi} \circ \vec{\eta}$.

a) $f(1,1) = \psi \circ \vec{\varphi}(\vec{\eta}(1,1)) = \psi \circ \vec{\varphi}(-1,3)$

$= \psi(7,-3,8) = -41.$

b)

Es ist $\operatorname{grad} f(1,1) = f'(1,1) = (\psi \circ \vec{\varphi} \circ \vec{\eta})'(1,1)$

$= \psi'(\vec{\varphi} \circ \vec{\eta}(1,1)) \cdot \vec{\varphi}'(\vec{\eta}(1,1)) \cdot \eta'(1,1)$

$$= (-2x, -2y, 2)\Big|_{\vec{\varphi}\circ\vec{\eta}(1,1)} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{\vec{\eta}(1,1)} \cdot \begin{pmatrix} 3x^2 & -4y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)}$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} (-14, 6, 2) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (50, -22) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$= (106, -222)$

c) E: $z = f(1,1) + D_1 f(1,1)(x-1) + D_2 f(1,1)(y-1)$

$= -41 + 106(x-1) - 222(y-1)$

$= 75 + 106x - 222y$

(2)

a) $v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(\vec{g}(r,\varphi))$

mit $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$v'(r,\varphi) = u'(\vec{g}(r,\varphi))\,\vec{g}\,'(r,\varphi)$$

$$= \left(u_x(x,y),\, u_y(x,y)\right)\Big|_{\binom{x}{y}=\vec{g}(r,\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r,\varphi) = (v_r(r,\varphi),\, v_\varphi(r,\varphi))$ erhält man:

$$v_r(r,\varphi) = \cos\varphi\; u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\; u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$
$$v_\varphi(r,\varphi) = -r\sin\varphi\; u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\; u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

b) $$v_{rr}(r,\varphi) = \cos\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi$$
$$+ u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi\big)$$
$$+ \sin\varphi\,\big(u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi$$
$$+ u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi\big)$$

$$= \cos^2\varphi\; u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\cos\varphi\; u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$+ \sin^2\varphi\; u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

$$v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = -r\cos\varphi\; u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$-r\sin\varphi\,\big[u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(-r\sin\varphi) + u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big]$$
$$-r\sin\varphi\; u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$+ r\cos\varphi\,\big[u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big]$$

$$= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi \cdot u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$+ r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$+ r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Dabei gilt:

$$v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r} v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)$$
$$= (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,[u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)]$$
$$= u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$$

mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

(3)

Es ist $T_2\left(f, \binom{x_0}{y_0}\right)(x,y) = f(x_0,y_0) + D_1 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)$

$$+ D_2 f(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!}\Big[D_1^2 f(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 D_1D_2 f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)$$

$$+ D_2^2 f(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \Big]$$

a) Es gilt: $f(\pi,1) = -1+\pi$

$D_1 f(x,y) = -\sin(xy)\cdot y + e^{y-1} \quad \Rightarrow \quad D_1 f(\pi,1) = 1$

$D_2 f(x,y) = -\sin(xy)\cdot x + x e^{y-1} \quad \Rightarrow \quad D_2 f(\pi,1) = \pi$

$D_1^2 f(x,y) = -\cos(xy)\, y^2 \quad \Rightarrow \quad D_1^2 f(\pi,1) = 1$

$D_2^2 f(x,y) = -\cos(xy)\cdot x^2 + x e^{y-1} \quad \Rightarrow \quad D_2^2 f(\pi,1) = \pi^2+\pi$

$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) = -\sin(xy) + \cos(xy)\cdot xy + e^{y-1}$

$$\Rightarrow \quad D_1D_2 f(\pi,1) = \pi+1$$

Also:

$$T_2\left(f,\binom{\pi}{1}\right)(x,y) = -1+\pi$$

$$+ 1(x-\pi) + \pi(y-1)$$

$$+ \frac{1}{2!}\Big[1(x-\pi)^2 + 2(1+\pi)(x-\pi)(y-1)$$

$$+ (\pi^2+\pi)(y-1)^2\Big]$$

$$= -1+\frac{\pi}{2}+2\pi^2 - 2\pi x - (\pi+2\pi^2)y + \frac{1}{2}x^2 + (1+\pi)xy + \frac{1}{2}(\pi+\pi^2)y^2.$$

b) $g(x,y) = x^2 \sin\frac{xy}{2}$

$g_x(x,y) = 2x\sin\frac{xy}{2} + \frac{x^2y}{2}\cos\frac{xy}{2}$

$g_y(x,y) = \frac{x^3}{2}\cos\frac{xy}{2}$

$$g_{xx}(x,y) = 2\sin\frac{xy}{2} + 2xy\cos\frac{xy}{2} - \frac{x^2y^2}{4}\sin\frac{xy}{2}$$

$$g_{xy}(x,y) = \frac{3}{2}x^2\cos\frac{xy}{2} - \frac{x^3y}{4}\sin(xy)$$

$$g_{yy}(x,y) = -\frac{x^4}{4}\sin\frac{xy}{2} \ldots$$

Damit ist $g(1,\pi) = 1$, $g_x(1,\pi) = 2$, $g_y(1,\pi) = 0$

$g_{xx}(1,\pi) = 2 - \frac{\pi^2}{4}$, $g_{xy}(1,\pi) = -\frac{\pi}{4}$

$g_{yy}(1,\pi) = -\frac{1}{4}$,

und

$$T_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2!}\Big[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)(x-1)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(x-1)(y-\pi) + \frac{1}{4}(y-\pi)^2\Big]$$

$$= \ldots$$

c) $h(x,y) = x^y = e^{y\cdot\ln x}$ $\quad \left(\binom{x}{y} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x,y) = e^{y\cdot\ln x}\cdot\frac{y}{x} = y\,x^{y-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}h(x,y) = \ln x\, e^{y\cdot\ln x} = \ln x\cdot x^y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,y) = y\cdot(y-1)\,x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}h(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}h(x,y) = x^{y-1} + (\ln x)\,y\,x^{y-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}h(x,y) = (\ln x)^2 e^{y\cdot\ln x} = (\ln x)^2\cdot x^y.$$

Wir erhalten: $h(1,3) = 1$, $\frac{\partial}{\partial x}h(1,3) = 3$, $\frac{\partial}{\partial y}h(1,3) = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(1,3) = 6$, $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}h(1,3) = 1$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}h(1,3) = 0$

Somit:

$$T_2(x,y) = 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + (x-1)(y-3).$$

Näherungsweise Berechnung von $1.02^{3.01}$

$$1.02^{3.01} = f(1.02, 3.01) \approx T_2(1.02, 3.01)$$

$$= 1 + 3(0.02) + 3 \cdot (0.02)^2 + 0.02 \cdot 0.01$$

$$= 1.0614.$$

d) $i(x,y) = \arctan(xy) \Rightarrow i(1,1) = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{di}{dx}(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2} \Rightarrow \frac{di}{dx}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{di}{dy}(x,y) = \frac{x}{1+(xy)^2} \Rightarrow \frac{di}{dy}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2i}{dx^2}(x,y) = -\frac{2xy^3}{(1+(xy)^2)^2} \Rightarrow \frac{d^2i}{dx^2}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2i}{dx\,dy}(x,y) = \frac{d^2i}{dy\,dx}(x,y) = \frac{(1+(xy)^2) - y(2xy)\cdot x}{(1+(xy)^2)^2}$$

$$= \frac{1-(xy)^2}{(1+(xy)^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dx\,dy}(1,1) = 0$$

$$\frac{d^2i}{dy^2}(x,y) = \frac{-2x^3y}{(1+(xy)^2)^2} \Rightarrow \frac{d^2i}{dy^2}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

Also $T_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2$

$= \ldots$

(4)

Für $|x+y|<1$ ergibt die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x+y} = \frac{1}{1-(-(x+y))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+y)^k$$

$$= 1-(x+y)+(x+y)^2-(x+y)^3+\ldots$$

$$= 1-x-y+x^2+2xy+y^2-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3+\ldots$$

Damit entfällt die Berechnung der partiellen Ableitungen von f bei $\binom{0}{0}$, ebenso die mühsame Abschätzung des Restglieds.

Es ist $T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x+y)^k$, und es gilt

$$T_n(x,y) \to f(x,y) \quad \text{für } |x+y|<1.$$

5

a)

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \big((-4x^2-4xy-6x+2)\, e^{-x^2-y^2},\ (-4xy-4y^2-6y+2)\, e^{-x^2-y^2} \big) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2xy+3x-1 = 0 & (1) \\ 2xy+2y^2+3y-1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $$0 = 2x^2-2y^2+3x-3y = (2(x+y)+3)(x-y)$$

1. Fall: $x=y$: in (1) $4x^2+3x-1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{4}$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

2. Fall: $2(x+y)+3 = 0$

in (1): $$0 = 2x^2+2xy+3x-1 = \underbrace{(2x+2y+3)}_{=0}x - 1 = -1 \quad ↯$$

Stationäre Stellen sind daher $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

Es ist $$f_{xx}(x,y) = (-2x)e^{-x^2-y^2}\underbrace{(-4x^2-4xy-6x+2)}_{=0 \text{ in } \binom{-1}{-1},\ \binom{1/4}{1/4}} + e^{-x^2-y^2}(-8x-4y-6)$$

$$f_{xy}(x,y) = (-2y)e^{-x^2-y^2}\cdot(\dots) + e^{-x^2-y^2}(-4x)$$

$$f_{yy}(x,y) = (-2y)e^{-x^2-y^2}\underbrace{(-4xy-4y^2-6y+2)}_{=0 \text{ in } \binom{-1}{-1},\ \binom{1/4}{1/4}} + e^{-x^2-y^2}(-4x-8y-6)$$

$$H_f(-1,-1) = e^{-2}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad : \text{ positiv definit}$$

$$H_f\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right) = e^{-1/8}\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix} \quad : \text{ negativ definit}$$

$\rightsquigarrow$ Lokales Maximum in $\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right)$,
lokales Minimum in $(-1,-1)$.

b) $\operatorname{grad} g(x,y) = \left(2\cdot(x^2-1)2x + 2(x^2-e^y)\cdot 2x \, , \, 2(x^2-e^y)(-e^y)\right)$

$\overset{!}{=} (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2-1-e^y) = 0 & (1) \\ e^y(x^2-e^y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Wegen (2): $x^2 = e^y$. In (1): $0 = x(x^2-1)$,
also $x=0$, $x=1$ oder $x=-1$.

Wegen $y = \ln x^2$ bleiben als stationäre Stellen nur $\binom{1}{0}$ und $\binom{-1}{0}$.

Es ist $D_1^2 g(x,y) = 12x^2 - 4 + 4(x^2-e^y) + 8x^2$
$= 4(6x^2-1-e^y)$

$D_1D_2\, g(x,y) = D_2D_1\, g(x,y) = -4xe^y$

$D_2^2\, g(x,y) = 4e^{2y} - 2x^2e^y$

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad : \text{ positiv definit}$$

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad : \text{ positiv definit}$$

Minima bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: f besitzt zwei lokale Minima, aber weder lok. Maximum noch Sattelpunkt.

c)

$$\operatorname{grad} h(x,y) = (4x^3 + 4y - 4x,\ 4y^3 + 4x - 4y) \stackrel{!}{=} (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y - x = 0 & (1) \\ y^3 + x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\underset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \quad x^3 = y^3, \text{ d.h. } x^3 = -y^3 \text{ bzw. } x = -y.$$

Einsetzen in (1) ergibt $x^3 - 2x = 0$, d.h. $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$.

Stationäre Stellen: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$H_h(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_h(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

positiv definit

Minimum bei $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \det H_h(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ Kriterium macht keine Aussage.

Es ist $h(0,0) = 0$, $h(x,x) = 2x^4 > 0 = h(0,0)$,

$h(x,0) = x^2(x^2 - 2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } |x| \text{ klein}}}{<} 0 = h(0,0)$

Sattelpunkt in $(0,0)$.

(6)

a) i) Lokale Extrema im Innern: $\text{int}\, D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x, y > -1 \}$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 3y^2, \; 4y^3 - 6xy) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ y(2y^2 - 6x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Betrachte (2). <u>Fall 1</u>: $y = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} x = 0$

Fall (2): $2y^2 - 3x = 0 \underset{\text{in } (1)}{\Rightarrow} 0 = x^2 - y^2$

$$= x^2 - \tfrac{3}{2}x = x(x - \tfrac{3}{2}).$$

$x = 0$ liefert wieder $y = 0$

$x = \frac{3}{2}$ liefert $y^2 = \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$.

Stationäre Stellen sind damit $\binom{0}{0}$, $\binom{3/2}{3/2}$ und $\binom{3/2}{-3/2} \notin \text{int}\, D$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}$$

$$H_f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$: positiv definit → lokales Minimum

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$: keine Aussage

Da $f(x,0) = x^3 \begin{cases} > 0 = f(0,0) & \text{für } x > 0 \\ < 0 = f(0,0) & \text{für } x < 0 \end{cases}$

besitzt f in $\binom{0}{0}$ einen Sattelpunkt.

ii) Extrema auf dem Rand.

$$\partial D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \; x = -1, \, y \geq -1 \right\}$$
$$\cup \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \; y = -1 \; , \; x \geq -1 \right\}$$

ii 1) $x = -1 \; , \; y \geq -1$

$$g(y) := f(-1, y) = y^4 + 3y^2 - 1 \qquad , \; y \geq -1.$$

$$g'(y) = 4y^3 + 6y$$
$$g''(y) = 12y^2 + 6$$

<u>Bedingung</u> $\quad g'(y) = 0 : \qquad 2y\,(2y^2 + 3) = 0$

$\Rightarrow y = 0 \quad . \quad g''(0) = 6 > 0.$

Folglich besitzt g für $y = 0$ ein lokales Minimum, und am Rand $y = -1$ des Definitionsbereichs $[-1, \infty)$ ein lokales Maximum.

Daher besitzt f in $\binom{-1}{0}$ evtl. (!) ein relatives Minimum, und in $\binom{-1}{-1}$ evtl. ein relatives Maximum.

$\operatorname{grad} f(-1, 0) = (3, 0)$ zeigt ins Innere von D

$\Rightarrow$ relatives Randminimum von f in $\binom{-1}{0}$.

$\operatorname{grad} f(-1, -1) = (0, -2)$ zeigt in Äußere von D

$\Rightarrow$ relatives Randmaximum.

ii 2) $y = -1, x \geq -1$:

$$h(x) = f(x,-1) = x^3 - 3x + 1 \quad , x \geq -1$$

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{für } x = \pm 1,$$

$$h''(x) = 6x \quad \text{mit} \quad h''(1) = 6 > 0 \quad \text{und} \quad h''(-1) = -6 < 0.$$

Folglich besitzt h in $x = 1$ ein lokales Minimum und in $x = -1$ ein lokales Maximum.

Daher besitzt f in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ evtl. ein relatives Randminimum und in $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ evtl. ein relatives Randmaximum.

Wegen ii 1) liegt in $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein rel. Randmaximum vor.

$\operatorname{grad} f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeigt ins Innere von D, also liegt ein Randminimum vor.

b) i) $\operatorname{int} D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 36 \right\}$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x + y - 6, \; x + 2y) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(4,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum bei $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

ii) Rand $\partial D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 36 \right\}$

Parametrisierung: $x = 6 \cos t$, $y = 6 \sin t$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

$$f(x,y) = f(6\cos t, 6\sin t)$$
$$= 36 \sin t \cos t - 36 \cos t + 38 =: g(t)$$

$$g'(t) = 36\cos^2 t - 36 \sin^2 t + 36 \sin t$$
$$\underset{\cos^2 = 1-\sin^2}{=} 36(1 + \sin t - 2\sin^2 t) \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow$ $s = \sin t$ löst $s^2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow$ $s = \sin t = 1$ oder $s = \sin t = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $t = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{7\pi}{6}$ oder $\frac{11\pi}{6}$.

$$g''(t) = 36(\cos t - 4 \sin t \cos t)$$
$$= 36 \cos t (1 - 4\sin t)$$

$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Da $g''(t) \begin{cases} < 0 & \text{für } t < \frac{\pi}{2} \\ > 0 & \text{für } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

für t nahe $\frac{\pi}{2}$, ist g'' in $\frac{\pi}{2}$ monoton wachsend, d.h. $g'''\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$: Sattelpunkt von g in $\frac{\pi}{2}$.

$$g''\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 36 \underbrace{\cos\frac{7\pi}{6}}_{<0} \underbrace{\left(1 - 4 \underbrace{\sin\frac{7\pi}{6}}_{<0}\right)}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow$ Lokales Maximum von g in $\frac{7\pi}{6}$.

$$g''\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 36 \underbrace{\cos\frac{11\pi}{6}}_{>0} \underbrace{\left(1 - 4 \underbrace{\sin\frac{11\pi}{6}}_{<0}\right)}_{>0} > 0:$$

Lokales Minimum von g in $\frac{11\pi}{6}$

Insgesamt: f besitzt in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cos \frac{7\pi}{6} \\ 6 \sin \frac{7\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$

evtl. ein relatives Randmaximum, und in

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cos \frac{11\pi}{6} \\ 6 \sin \frac{11\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$ evtl. ein Randminimum.

$\operatorname{grad} f(-3\sqrt{3}, -3) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 9 \\ -3\sqrt{3} - 6 \end{pmatrix}$ zeigt nach außen

$\Rightarrow$ Randmaximum in $\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{grad} f(3\sqrt{3}, -3) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} - 9 \\ 3\sqrt{3} - 6 \end{pmatrix}$ zeigt nach

außen(!), f nimmt demnach kleinere Werte als in

$(3\sqrt{3}, -3)$ an, kein Minimum in $(3\sqrt{3}, -3)$.

7

Mit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz)$

gilt $f(0,0,-1) = 0$.

Wegen $D_3 f(x,y,z) = 1 + \sinh(xyz) \cdot xy$ und

$D_3 f(0,0,-1) = 1$

ist in einer Umgebung von $(0,0,-1)^T$ implizit eine Funktion $z = g(x,y)$ mit $1 = g(0,0)$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0$ gegeben.

Für ihre Ableitung gilt

$$g'(0,0) = -\frac{1}{D_3 f(0,0,-1)} \cdot \left(D_1 f(0,0,-1), D_2 f(0,0,-1) \right)$$

$$= -(0,0).$$

(8) Wir sehen

$$\vec{F}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + ve^{-u} + xu - 1 \\ xy + yv + \frac{u}{v} - x \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $(x_0,y_0)^T = (0,0)^T$ in das nicht lineare Gleichungssystem

$$\vec{F}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt die Bedingungen

$$u^2 + ve^{-u} - 1 = 0 \quad , \quad \frac{u}{v} = 0 .$$

Also $u = 0$, $v = 1$; und damit $F(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weiter gilt $\det\left(\vec{F}_u(0,0,0,1) \,,\, \vec{F}_v(0,0,0,1) \right)$

$$= \det\left(\left.\begin{pmatrix} 2u - ve^{-u} + x & e^{-u} \\ \frac{1}{v} & y - \frac{u}{v^2} \end{pmatrix}\right|_{(0,0,0,1)} \right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Daher liefert der Satz über implizit definierte Funktionen:
Nahe $(x,y)^T = (x_0,y_0)^T = (0,0)^T$ werden durch

$$u^2 + ve^{-u} + xu = 1 \quad , \quad xy + yv + \frac{u}{v} = x$$

oder kurz $\vec{F}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei Funktionen

$$u = u(x,y) \quad \text{und} \quad v = v(x,y) \quad \text{definiert}.$$

Speziell ist $u(0,0) = 0$, $v(0,0) = 1$.

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nahe $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{F}(x, y, u(x,y), v(x,y)) = \vec{F}(\vec{\varphi}(x,y)) =: \vec{G}(x,y)$$

mit $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$

und $\vec{G} = \vec{F} \circ \vec{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Damit ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{G}'(x,y)$

$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \vec{F}'(\vec{\varphi}(x,y)) \cdot \vec{\varphi}(x,y)$ nahe $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Speziell ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ eingesetzt)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{\varphi}(0,0)) \cdot \vec{\varphi}(0,0)$$

$\vec{\varphi}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \vec{F}(0,0,0,1) \cdot \vec{\varphi}'(0,0)$$

$$= \left.\begin{pmatrix} u & 0 & 2u - ve^{-u} + x & e^{-u} \\ y-1 & x+v & \frac{1}{v} & y - \frac{u}{v^2} \end{pmatrix}\right|_{(0,0,0,1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_x(0,0) & u_y(0,0) \\ v_x(0,0) & v_y(0,0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_x(0,0) & u_y(0,0) \\ v_x(0,0) & v_y(0,0) \end{pmatrix}$$

$$= \left.\begin{pmatrix} v_x - u_x & v_y - u_y \\ -1 + u_x & 1 + u_y \end{pmatrix}\right|_{(x,y)^T = (0,0)}$$

Damit ist:

$$u_x(0,0) = 1 = v_x(0,0),$$
$$u_y(0,0) = -1 = v_y(0,0).$$

⑨ Es sei $f(x,y,z) = (x+y-2z-1)^2 + (y-z)^2 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right)$.

Um die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach x und y ...
aufzulösen, kann der Satz über implizit definierte Funktionen
nicht angewandt werden, da die Funktion f nicht die nötigen
Voraussetzungen erfüllt.
Trotzdem ist eine globale Auflösung $x = h_1(z)$, $y = h_2(z)$
für $z \in \mathbb{R}$ möglich.

a) Es gilt $f(1,0,0) = 0$.
Die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$x+y-2z-1 = 0 \quad \text{und} \quad y-z = 0$$

für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ erfüllt ist.
Dies sind zwei Ebenengleichungen, und der Schnitt beider Ebenen
bildet eine Gerade. Beide Ebenen haben den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gemeinsam.
Daher muss nur noch der Richtungsvektor der Schnittgeraden bestimmt
werden. Dieser ist gegeben durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Menge $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0 \right\}$ ist
daher gegeben durch

$$\left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \right\}.$$

Setzt man $\vec{h}(z) = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(z) \\ h_2(z) \end{pmatrix}$, so gilt

$$\vec{h}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(h_1(z), h_2(z), z) = 0 \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Des weiteren gilt $h'(0) = (1, 1)$.

b)