UNIVERSITÄT KARLSRUHE 06.07.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

12.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (Ü)
Bestimmen Sie Definitionsbereich, Ableitung und Definitionsbereich der Ableitung für die durch

$$f(x) = \int_{1/x}^{x^2} \cos(xt^2)\, dt$$

gegebene Funktion.

Aufgabe 2 (Ü)
Die Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ zwar in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber keine (globale) Umkehrfunktion besitzt.

Aufgabe 3 (Ü)
Es sei $D = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{16} = 0$$

a) mit Hilfe geometrischer Überlegungen,

b) mittels des Verfahrens von Lagrange.

Aufgabe 4 (Ü)
Bestimmen Sie Minimum und Maximum der durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \qquad \text{und} \qquad z = x + y.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 5 (T)
Skizzieren Sie folgende Bereiche des $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt:

a) $B = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 - 1 \le y \le 2 - x\right\}$,

b) $B = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ y^2 \le x \le 4 - y^2\right\}$,

c) $B = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x, y \ge 0,\ xy \le 1,\ (2-x)(2-y) \ge 0\right\}$.

Aufgabe 6 (T)
Skizzieren Sie den Integrationsbereich folgender Integrale, vertauschen Sie die Integrations-reihenfolge und berechnen Sie ihren Wert:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy,$ b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\max\{0,\,4x-4\}}^{x^2} 2xy \, dy \, dx.$

Aufgabe 7 (T)
Berechnen Sie die folgenden Integrale und skizzieren Sie die Integrationsbereiche:

a) $\displaystyle\iint_G (y + x^2) \, d(x,y)$, G ist das Dreieck mit den Ecken $(0,0)^\top$, $(1,5)^\top$ und $(5,1)^\top$.

b) $\displaystyle\iint_G \sqrt{y} \, d(x,y)$, G ist der Bereich, der von der Parabel durch die Punkte $(0,0)^\top$, $(1,6)^\top$ und $(5,-10)^\top$ sowie von der x-Achse begrenzt wird.

c) $\displaystyle\iint_G \cosh \frac{x}{y+1} \, d(x,y)$, mit $G = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ y - x + 1 > 0,\ y^2 - x - 1 < 0\right\}$.

Aufgabe 8 (T)
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma xy \, dx + (x - y) \, dy$, γ ist der positiv orientierte Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $(0,1)^\top$, $(0,3)^\top$, $(1,1)^\top$ und $(1,3)^\top$,

b) $\displaystyle\int_\gamma xy^2 \, dy$, γ ist die in mathematisch positivem Sinne einmal durchlaufene Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$,

c) $\displaystyle\int_\gamma (x+y) \, dx + (x - y) \, dy$, γ ist die zwischen den Punkten $(-1,1)^\top$ und $(1,1)^\top$ von links nach rechts durchlaufene Parabel $y = x^2$.