Höhere Mathematik II

Lösungen zum 12. Übungsblatt

Differentiation von Parameterintegralen

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$, $R = [a,b] \times [c,d]$ und $f : R \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ferner seien f und $D_2 f$ stetig in R.

Satz 1: Unter diesen Voraussetzungen gilt für die durch

$$P(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx \qquad (c \le y \le d)$$

definierte Funktion $P : [c,d] \to \mathbb{R}$:

$$P'(y) = \int_a^b D_2 f(x,y)\, dx \qquad (c \le y \le d).$$

Beweis von Satz 1: siehe Literatur

Satz 2: Zusätzlich zu der Voraussetzung seien $p, q : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

Für die durch

$$F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\, dx \qquad (c \le y \le d)$$

definierte Funktion $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ gilt: F ist differenzierbar und

$$(*) \quad F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} (D_2 f)(x,y)\, dx + f(q(y),y) \cdot q'(y) - f(p(y),y) \cdot p'(y)$$

$$(c \le y \le d).$$

Beweis von Satz 2: Wir definieren

$G : [a,b] \times [a,b] \times [c,d]$ durch $G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, x_3)\, dx$

und $\vec{g} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ durch $\vec{g}(y) = \begin{pmatrix} p(y) \\ q(y) \\ y \end{pmatrix}$.

Hiermit gilt
$$F(y) = G(\vec{g}(y)) = (G \circ \vec{g})(y).$$

G ist nach Voraussetzung stetig partiell differenzierbar, also G differenzierbar.
Es ist also

$$\begin{aligned} G'(\vec{g}(y)) &= (\operatorname{grad} G)(\vec{g}(y)) \\ &= \left(D_1 G(\vec{g}(y)),\ D_2 G(\vec{g}(y)),\ D_3 G(\vec{g}(y)) \right) \\ &\underset{\text{Satz 1}}{=} \Big(\underbrace{-f(p(y),y),\ f(q(y),y)}_{\text{nach HM I}},\ \int_{p(y)}^{q(y)} (D_2 f)(x,y)\, dx \Big). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt somit

$$F'(y) = G'(\vec{g}(y)) \cdot \vec{g}\,'(y) = (\operatorname{grad} G)(\vec{g}(y)) \cdot \begin{pmatrix} p'(y) \\ q'(y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1)

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \cos(x t^2)\, dt = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)\, dt$$

$$\underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \quad f'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{d}{dx} g(x,t)\, dt + g(x,\beta(x)) \cdot \beta'(x) - g(x,\alpha(x))\, \alpha'(x)$$

$$= \int_{1/x}^{x^2} (-t^2) \sin(x t^2)\, dt + \cos(x^5) \cdot 2x + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Es ist $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) Mit $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$,

gilt
$$\vec{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \qquad \left(\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \right).$$

Folglich ist $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, und wir erhalten für jeden Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\det \vec{f}'(x,y) = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0.$$

Daher ist $\vec{f}'(x,y)$ für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ invertierbar, und daher $\vec{f}$ nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit für jedes $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar.

Von der globalen Umkehrbarkeit kann allerdings keine Rede sein.
Ist nämlich $u \neq 0$ oder $v \neq 0$ und $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, so gibt es ein $y \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\begin{aligned} u &= r \cos y \\ v &= r \sin y \end{aligned}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned} \quad \text{mit } x = \ln r$$

ist. Wegen der 2π-Periodizität des Kosinus und Sinus ist dann aber auch

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos(y + 2k\pi) \\ v &= e^x \sin(y + 2k\pi) \end{aligned},$$

also
$$\binom{u}{v} = \vec{f}(x, y + 2k\pi) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

D.h. jeder vom Nullpunkt verschiedene Punkt des $\mathbb{R}^2$ tritt unendlich oft als Bildpunkt der Abbildung $\vec{f}$ auf.

Man kann allerdings zeigen, dass die Abbildung $\vec{f}|_S : S \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ bijektiv ist, also umkehrbar. Dabei ist

$$S = \mathbb{R} \times [\alpha, \alpha + 2\pi) \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Der Beweis ist einfach, und wird in der Regel auch in HM3 in anderem Zusammenhang erbracht.

Lagrangesche Multiplikatorenregel

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen. $f: D \to \mathbb{R}$ und

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^p$$ seien stetig differenzierbare Funktionen $(p < n)$,

und f besitze in $\vec{\xi} \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\vec{g}(\vec{\xi}) = \vec{0}$.

Ferner seien die Vektoren $\nabla g_1(\vec{\xi}), \ldots, \nabla g_p(\vec{\xi})$ $(\in \mathbb{R}^n)$ linear unabhängig.
Dann existieren p Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ („Lagrangesche Multiplikatoren"), mit denen die Gleichung

$$(*) \quad f'(\vec{\xi}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, g_j'(\vec{\xi}) = \vec{0}^T$$ besteht.

Praktische Lösung der Extremalaufgabe:

Um die Stellen lokaler Extrema von f unter der Nebenbedingung $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ zu bestimmen, wird man folgendermaßen vorgehen:
Man betrachtet das System der $n+p$ Gleichungen

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial g_p(\vec{x})}{\partial x_k} &= 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \\ g_j(\vec{x}) &= 0 \quad (j = 1, \ldots, p) \end{aligned}$$

für die $n+p$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Die ersten n Gleichungen geben $(*)$ wieder, die restlichen repräsentieren die Nebenbedingungen.

Merkregel: Man erhält $(*)$, indem man die partiellen Ableitungen der Funktion

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda_p g_p(x_1,\ldots,x_n)$$

nach $x_1,\ldots,x_p$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ bildet und gleich 0 setzt.

Nun löst man $(*)$. Jeder Punkt $\vec{\zeta} \in D$, dessen Koordinaten $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ den „Anfang" einer Lösung $x_1,\ldots,x_n$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ bilden und für den die Vektoren $\nabla g_1(\vec{\zeta}),\ldots,\nabla g_p(\vec{\zeta})$ unabhängig sind, steht dann gemäß der Multiplikatorenregel im Verdacht, Stelle eines lokalen Extremums von f unter der Nebenbedingung $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ zu sein.

Dies muss im einzelnen dann überprüft werden.

Weitere lokale Extremstellen können sich dann nur noch dort befinden, wo $\nabla g_1(\vec{\zeta}),\ldots,\nabla g_p(\vec{\zeta})$ linear abhängig sind.

(3) $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$, $f: D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

a) Durch $z = f(x,y)$ wird die Kugelschale mit Radius 1 über der xy-Ebene beschrieben.

$g(x,y) = 0$ stellt den Kreis in der xy-Ebene um den Punkt $(\frac{1}{2}, 0)^T$ mit Radius $\frac{1}{4}$ dar.

Anschaulich ist klar, dass das Maximum von f unter der Nebenbedingung im höchsten Punkt auf der Kugelfläche über der Kreislinie liegt, also bei $(\frac{1}{4}, 0)^T$.

Das Minimum dagegen bei $(\frac{3}{4}, 0)^T$.

ã) Eine andere Möglichkeit ist, die Nebenbedingung nach y^2 aufzulösen und in $f(x,y)$ einzusetzen.

b) Lagrangeverfahren:

$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \lambda\left((x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 - \tfrac{1}{16} \right)).$$

Dann ist

(1) $$\frac{d}{dx} L(x,y,\lambda) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 2\lambda (x - \tfrac{1}{2}) \stackrel{!}{=} 0$$

(2) $$\frac{d}{dy} L(x,y,\lambda) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0$$

(3) $$\frac{d}{d\lambda} L(x,y,\lambda) = (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 - \tfrac{1}{16} \stackrel{!}{=} 0$$

(Betrachte (1), (2), (3) nur auf $\operatorname{int} D = \mathring{D}$ (vgl. Nebenbedingung)))

Aus ② erhalten wir $y=0$ oder $2\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Für $2\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \neq 0$ ist

$$\frac{d}{dx} L(x,y,\lambda) = -2x\lambda + 2\lambda\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\lambda \neq 0.$$

Dies liefert also keine Lösung.

Für $y=0$ folgt aus ③ : $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$, also $x = \frac{1}{4}$ oder $x = \frac{3}{4}$.

Durch Einsetzen in ① kann man die λ bestimmen, die ① erfüllen. (Braucht man aber nicht).

Extrema können also nur in den Punkten $(\frac{1}{4}, 0)^T$ und $(\frac{3}{4}, 0)^T$ auftreten.

Da f als stetige Funktion auf der beschränkten und abgeschlossenen Menge $G = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \}$ sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum annimmt, erhält man durch Vergleich der Funktionswerte $f(\frac{1}{4}, 0) > f(\frac{3}{4}, 0)$, dass bei $(\frac{1}{4}, 0)^T$ das Maximum und bei $(\frac{3}{4}, 0)^T$ das Minimum vorliegt.

(4)

Minimum und Maximum von $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ unter den Nebenbedingungen

$$\vec{g}(x,y,z) := \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 \\ z - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{Rang}\left(\nabla g_1(x,y,z), \nabla g_1(x,y,z) \right)$

$$= \text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{x}{2} & -1 \\ \frac{2y}{5} & -1 \\ \frac{2z}{25} & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{2z}{25} & 0 \\ \frac{2y}{5} + \frac{2z}{25} & 0 \\ \frac{2z}{25} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Rang}\begin{pmatrix} 25x + 4z & 0 \\ 20y + 4z & 0 \\ 4z & 50 \end{pmatrix} \underset{\substack{NB \\ z=x+y}}{=} \text{Rang}\begin{pmatrix} 29x + 4y & 0 \\ 24y + 4x & 0 \\ 4x + 4y & 50 \end{pmatrix}$$

$= 2.$ für alle $(x,y,z)^T$, für die gilt $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$.

$\ulcorner$ $\text{Rang}(\ldots) = 1$ nur für

$$\left.\begin{aligned} 29x + 4y &= 0 \\ \text{und} \quad 4x + 24y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = x+y = 0$$
$$\Rightarrow g_1(x,y,z) \neq 0 \quad ↯$$

$\llcorner$

Wende Satz von Lagrange an.

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$$
$$= x^2+y^2+z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right)$$
$$+ \mu\,(z-x-y).$$

$\nabla F(x,y,z,\lambda,\mu) \overset{!}{=} \vec{0}$:

$$\frac{dF}{dx}(\ldots) = 2x + \frac{1}{2}\lambda x - \mu \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(\lambda+4) = 2\mu \quad (1)$$

$$\frac{dF}{dy}(\ldots) = 2y + \frac{2}{5}\lambda y - \mu \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(10+2\lambda) = 5\mu \quad (2)$$

$$\frac{dF}{dz}(\ldots) = 2z + \frac{2}{25}\lambda z + \mu \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(50+2\lambda) = -25\mu \quad (3)$$

$$\frac{dF}{d\lambda}(\ldots) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 \overset{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$\frac{dF}{d\mu}(\ldots) = z - x - y \overset{!}{=} 0 \quad (5)$$

Setzt man in (1) $\lambda = -4$, dann folgt $\mu = 0$. Dies in (2) und (3) ergibt $y=0$ und $z=0$ (da $2\lambda+10 \neq 0$ und $2\lambda+50 \neq 0$). Also $x=0$ wegen (5). Allerdings liefert $x=y=z=0$ einen Widerspruch zu (4). Daher ist $\lambda \neq -4$.
Entsprechend zeigt man $\lambda \neq -5$ und $\lambda \neq -25$.

Somit ist

$$x = \frac{2\mu}{\lambda+4}, \quad y = \frac{5\mu}{10+2\lambda}, \quad z = -\frac{25\mu}{2\lambda+50} \quad (6)$$

Setzt man (6) in (5), so erhält man

$$-\frac{25\mu}{2\lambda+50}-\frac{2\mu}{\lambda+4}-\frac{5\mu}{2\lambda+10}=0$$

($\mu \neq 0$, sonst Widerspruch zu (4) wg. (6)!)

$$\Leftrightarrow \frac{25}{2\lambda+50}+\frac{2}{\lambda+4}+\frac{5}{2\lambda+10}=0$$

$$\Leftrightarrow 25(\lambda+4)(2\lambda+10)+2(2\lambda+50)(2\lambda+10)+5(2\lambda+50)(\lambda+4)=0$$

$$\Leftrightarrow 68\lambda^2+245\lambda+750=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+10)(17\lambda+75)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-10 \text{ oder } \lambda=-\frac{75}{17}.$$

- $\lambda=-10$ einsetzen in (6):

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\mu,\ y=-\frac{1}{2}\mu,\ z=-\frac{5}{6}\mu.$$

in (4): $\frac{\mu^2}{36}+\frac{\mu^2}{20}+\frac{\mu^2}{36}=1 \Leftrightarrow \mu^2=\frac{180}{19}$

$$\Leftrightarrow \mu=\pm 6\sqrt{\frac{5}{19}}$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\mp 2\sqrt{\frac{5}{19}},\ y_{1/2}=\mp 3\sqrt{\frac{5}{19}},\ z_{1/2}=\mp 5\sqrt{\frac{5}{19}}$$

- $\lambda=-\frac{75}{17}$ einsetzen in (6):

$$\Rightarrow x=-\frac{34}{7}\mu,\ y=\frac{17}{4}\mu,\ z=-\frac{17}{28}\mu.$$

in (4): $\frac{289}{49}\mu^2+\frac{289}{80}\mu^2+\frac{289}{28^2\cdot 25}\mu^2=1$

$$\Leftrightarrow \mu^2=\frac{(7\cdot4\cdot5)^2}{289\cdot 646}$$

$$\Leftrightarrow \mu=\pm\frac{140}{17}\frac{1}{\sqrt{646}}$$

Daher:

$$x_{3/4} = \mp \frac{40}{\sqrt{646}} \quad , \quad y_{3/4} = \pm \frac{35}{\sqrt{646}} \quad , \quad z_{3/4} = \mp \frac{5}{\sqrt{646}}$$

Maximum und Minimum existieren, da f auf der beschränkten und abgeschlossenen Menge

$$M = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \ , \ z - x - y = 0 \right\}$$

das Maximum und Minimum annimmt.

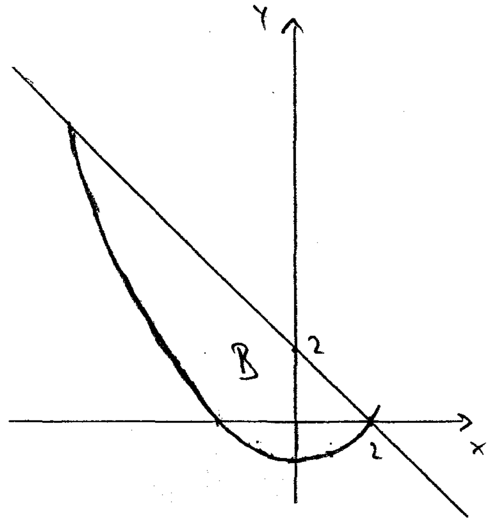
$\Rightarrow$ $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) = 10$ ist Maximum,

$f(x_3, y_3, z_3) = f(x_4, y_4, z_4) = \frac{75}{17}$ ist Minimum.

(5)

a) $\mathbb{B} = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 - 1 \le y \le 2-x \}$

Skizze:



$$|B| = \iint_B 1 \, d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_{-6}^{2} 2 - x - \frac{1}{4}x^2 + 1 \, dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-6}^{2}$$

$$= \frac{64}{3}$$

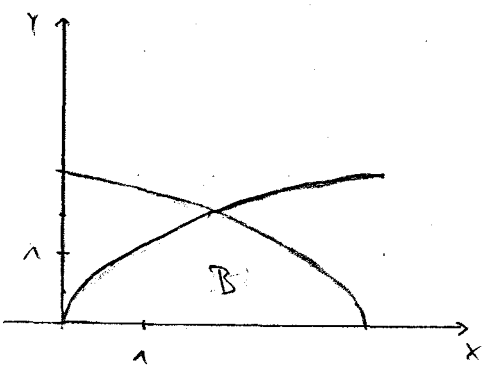
b) $B = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0 , y^2 \le x \le 4 - y^2 \}$

Schnittpunkt von $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$:

$y^2 = 4 - y^2 \iff y^2 = 2 \iff y = \sqrt{2} \quad (y = -\sqrt{2})$

also $y = \sqrt{2}$ wg. $y \ge 0$.

Skizze:

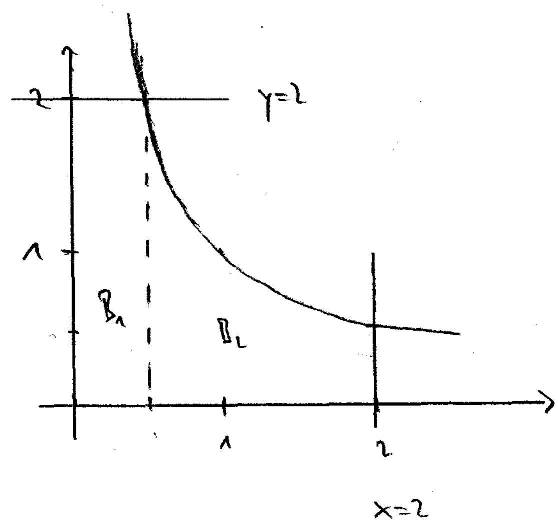


$$|B| = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} 4 - 2y^2\, dy = \left[4y - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{2}.$$

c). $B = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \; x,y \geq 0 \;,\; x \cdot y \leq 1 \;,\; (2-x)(2-y) \geq 0 \}$

Skizze:



$$(2-x)(2-y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-x \geq 0 \text{ und } 2-y \geq 0) \text{ oder } (2-x \leq 0 \text{ und } 2-y \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \leq 2 \text{ und } y \leq 2) \text{ oder } (y \geq 2 \text{ und } x \geq 2).$$

$$\Rightarrow \quad x \leq 2 \text{ und } y \leq 2 \quad \text{wg. } x \cdot y \leq 1.$$

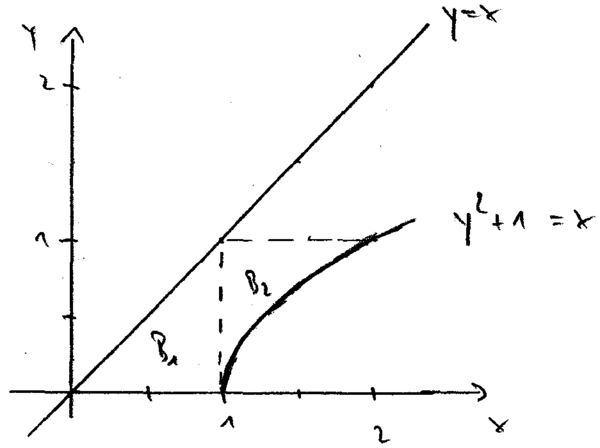
$$|B| = \iint_{B_1} d(x,y) + \iint_{B_2} d(x,y)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_0^{\frac{1}{x}} 1\, dy\, dx = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= 1 + [\ln x]_{\frac{1}{2}}^{2} = 1 + \ln 4.$$

⑥

a) <u>Skizze:</u>



$$\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy = \iint_{B_1} x^2 y \, dx \, dy + \iint_{B_2} x^2 y \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2\right]_0^x dx + \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2\right]_{\sqrt{x-1}}^1 dx$$

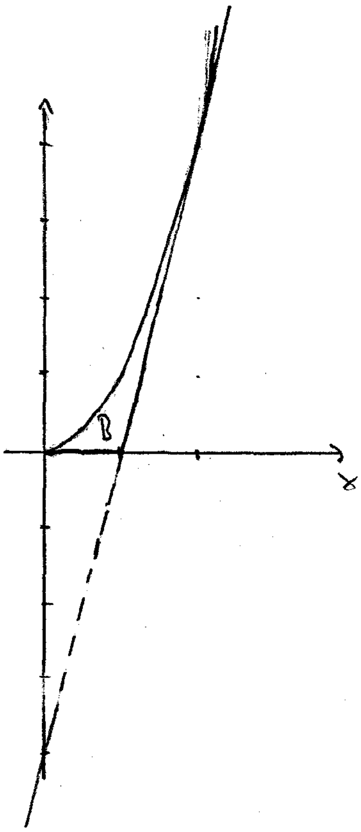
$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 \, dx + \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 (x-1)}_{= -\frac{1}{2} x^3 + x^2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{10} x^5\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{3} x^3\right]_1^2 = \frac{1}{10} + \left(-2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{67}{120}$$

b)

Skizze:



$$\int_0^2 \int_{\max\{0,4x-4\}}^{x^2} 2xy \; dy \; dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\frac{1}{4}y+1} 2xy \; dx \; dy$$

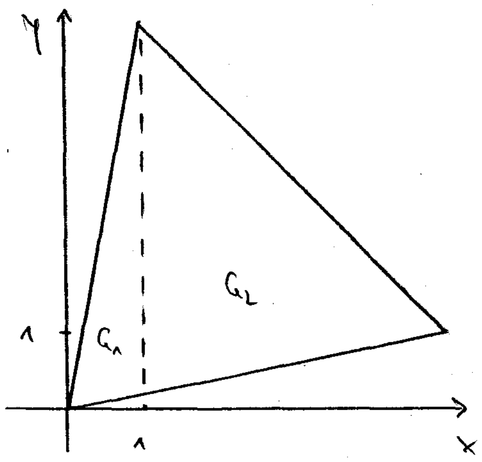
$$= \int_0^4 \left[x^2 y\right]_{\sqrt{y}}^{\frac{1}{4}y+1} dx = \int_0^4 \left(\left(\tfrac{1}{4}y+1\right)^2 y - y^2\right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{16} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + y \; dy$$

$$= \left[\frac{1}{64} y^4 - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{2} y^2\right]_0^4 = \frac{4}{3}$$

(7)

a) Skizze:



$$\iint_G (y+x^2)\,d(x,y) = \iint_{G_1} (y+x^2)\,d(x,y) + \iint_{G_2} (y+x^2)\,d(x,y)$$

$$= \int_0^1 \int_{\frac{1}{5}x}^{5x} (y+x^2)\,dy\,dx + \int_1^5 \int_{\frac{1}{5}x}^{6-x} (y+x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 + x^2 y\right]_{\frac{1}{5}x}^{5x} dx + \int_1^5 \left[\frac{1}{2}y^2 + yx^2\right]_{\frac{1}{5}x}^{6-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{312}{25}x^2 + \frac{24}{5}x^3\right) dx + \int_1^5 \left(\frac{1}{2}(36-12x+x^2) + 6x^2 - x^3 - \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{5}x^3\right) dx$$

$$= \left[\frac{104}{25}x^3 + \frac{6}{5}x^4\right]_0^1 + \int_1^5 \left(-\frac{6}{5}x^3 + \frac{162}{25}x^2 - 6x + 18\right) dx$$

$$= \frac{134}{25} + \left[-\frac{6}{20}x^4 + \frac{54}{25}x^3 - 3x^2 + 18\right]_1^5$$

$$= \frac{134}{25} + \frac{2010}{25} = 86.$$

b) $\iint\limits_G \sqrt{y}\, d(x,y)$

Parabel: $y = ax^2 + bx + c$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,6)$, $P_3(5,-10)$.

P_1: $c = 0$

P_2: $a + b = 6 \iff b = 6 - a$

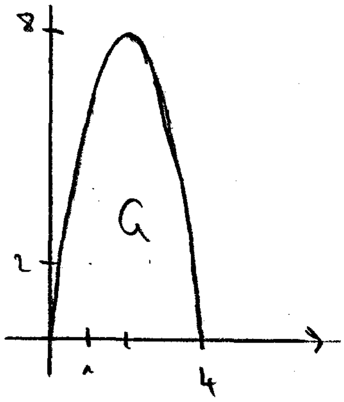
P_3: $25a + 5b = -10$

$$\left.\right\} \quad 25a + 5(6-a) = -10 \iff a = -2 \Rightarrow b = 8$$

Also $y = -2x^2 + 8x = (-2x)(x-4)$.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $x = 0$, $x = 4$

Skizze:



$$\iint\limits_G \sqrt{y}\, d(x,y) = \int_0^4 \int_0^{-2x^2+8x} \sqrt{y}\, dy\, dx = \int_0^4 \left[\tfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{-2x^2+8x} dx$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} \int_0^4 (4x - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} \int_0^4 \left(4 - (4 - 4x + x^2)\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} \int_0^4 \left(4 - (2-x)^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$\ulcorner$ Subst. $\frac{x-2}{2} = t$, $dx = 2\, dt$

$x = 0 \to t = -1$

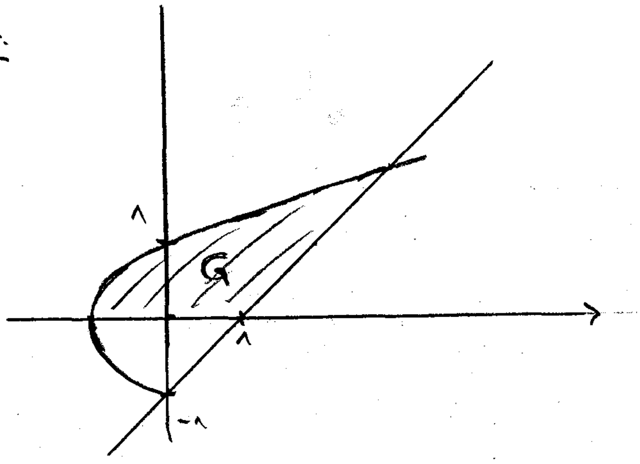
$x = 4 \to t = 1$

$$= \frac{64}{3}\sqrt{2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{3/2}\,dt = \frac{128}{3}\sqrt{2}\int_0^1 (1-t^2)^{3/2}\,dt$$

$$\underset{\text{Bronstein}}{=} \frac{128}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}\left[t(1-t^2)^{3/2} + \frac{3t}{2}(1-t^2)^{1/2} + \frac{3}{2}\arcsin t\right]_0^1$$

$$= \frac{32}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 8\sqrt{2}\,\pi.$$

c) Skizze:



Schnittpunkte von $x = y+1$ und $x = y^2-1$:

$$y^2 - y - 2 = 0 \iff (y-2)(y+1) = 0$$

$$\iint_G \cosh\frac{x}{y+1}\,d(x,y) = \int_0^2\int_{y^2-1}^{y+1}\cosh\frac{x}{y+1}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[(y+1)\sinh\frac{x}{y+1}\right]_{y^2-1}^{y+1} dy$$

$$= \int_0^2 (y+1)\left[\sinh 1 - \sinh(y-1)\right] dy$$

$$= \int_0^2 \left((y+1)\sinh 1 - y\sinh(y-1) - \sinh(y-1)\right) dy$$

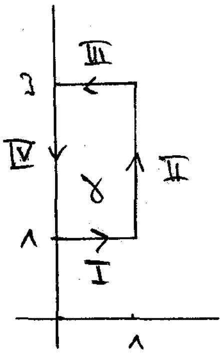
$$= \left[\frac{1}{2}\sinh 1\,(y+1)^2\right]_0^2 - \left[\cosh(y-1)\right]_0^2 - \left[y\cosh(y-1)\right]_0^2$$

$$+ \int_0^2 \cosh(y-1)\,dy$$

$$= 4\sinh 1 - 2\cosh 1 + \left[\sinh(y-1)\right]_0^2$$
$$= 6\sinh 1 - 2\cosh 1 .$$

8

a) Skizze:



$$\int_\gamma xy\,dx + (x-y)\,dy = \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} xy\,dx + (x-y)\,dy$$

γ_1: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (t \in [0,1])$

also $\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} xy\,dx + (x-y)\,dy = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

γ_2: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad (t \in [1,3])$, $\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} xy\,dx + (x-y)\,dy = \int_1^3 \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^3 (1-t)\,dt = \left[-\tfrac{1}{2}(1-t)^2\right]_1^3 = -2$$

γ_3: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad (t \in [0,1])$, $\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \dots = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3(1-t) \\ -2-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 3t - 3\,dt = \left[\tfrac{3}{2}t^2 - 3t\right] = -\frac{3}{2}$$

γ_4: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \end{pmatrix} \quad (t \in [0,2])$, $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

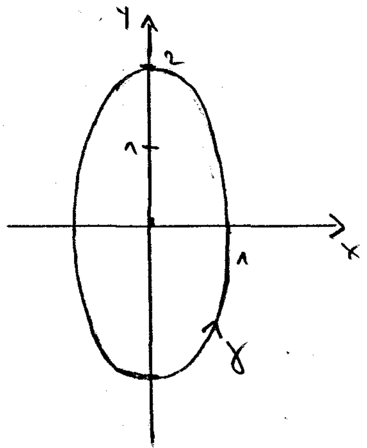
$$\int_{\gamma_4} \ldots = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 3-t \, dt$$

$$= \left[3t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^2 = 4$$

Folglich ist $\displaystyle\int_\gamma xy \, dx + (x-y) \, dy = 1$

b) Ellipse: $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ mit Halbachsen $a = 1$, $b = 2$

Skizze:



$$\gamma: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$$

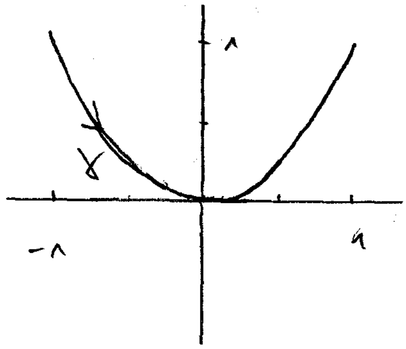
$$\int_\gamma x y^2 \, dy = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \cdot 4 \sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2 \cos^2 t \sin^2 t \, dt = 8 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2(2t) \, dt$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

c)

Skizze:



$$\gamma: \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$(t \in [-1,1])$$

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t+t^2 \\ t-t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^{1} t + t^2 + 2t^2 - t^3 \, dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}t^2 + t^3 - \tfrac{1}{4}t^4 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{4} - \left[\tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{4} \right] = 2$$