UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

13.07.2007

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

13.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (Ü)
Es sei γ eine stückweise glatte, im $\mathbb{R}^n$ verlaufende Kurve und $\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma^-} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Dabei bezeichnet γ^- die zu γ inverse Kurve.

Aufgabe 2 (Ü)
Es sei $a > 0$. Berechnen Sie den Inhalt des Bereichs der x-y-Ebene, der von der Kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi) \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

(Polarkoordinatendarstellung der Kardioide) umschlossen wird.

Aufgabe 3 (T)
Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Aufgabe 4 (Ü)
Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass folgendes Linienintegral wegunabhängig ist?

$$\int_P^Q \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^n}\, dx + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^n}\, dy \qquad (P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}).$$

Aufgabe 5 (T)
γ sei der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)^\top$, $(0,1)^\top$ und $(1,0)^\top$. Weiter sei $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mittels des Gaußschen Satzes.

Aufgabe 6 (T)
Berechnen Sie mittels des Gaußschen Satzes:

a) $$\iint_B x \, d(x,y), \qquad B = \left\{ (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0 \right\},$$

b) $$\iint_B (x^2 + y) \, d(x,y), \qquad B = \left\{ (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 7 (T)
Überprüfen Sie, ob bzw. wann folgende Vektorfelder Potentialfelder sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Potentiale. (Dabei sind a, b, c reelle Parameter und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen.)

a) $$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y \\ x^3 \end{pmatrix},$$

b) $$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ z e^x \\ xy \ln z \end{pmatrix},$$

c) $$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix},$$

d) $$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + z + yf(xy) \\ 3x^2 y - xf(xy) \\ x + z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (Ü)
Durch

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2uv \end{pmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

ist eine Fläche $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders

$$Z = \left\{ (x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

liegt.

Aufgabe 9 (Ü)
Es sei der Kegel $K = \left\{ (x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$, sowie das Vektorfeld $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\vec{f}(x,y,z) = (z, y, z+1)^\top$ gegeben.
Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

HINWEISE ZU DEN VORDIPLOMKLAUSUREN

- Die Vordiplomklausuren zur Höheren Mathematik finden an den folgenden Terminen statt:

HM I:	Montag, 24. September 2007, 8.00-10.00 Uhr,
HM II:	Montag, 24. September 2007, 11.00-13.00 Uhr,
HM III:	Dienstag, 25. September 2007, 8.00-10.00 Uhr.

- Die Anmeldung erfolgt durch Abgabe des Prüfungszettels im Sekretariat (Zimmer 312, Kollegiengebäude Mathematik).
- Anmeldeschluss ist Freitag, der 20. Juli 2007, 11.30 Uhr.
- Die Hörsaalverteilung wird am Montag, dem 17. September 2007, durch Aushang vor dem Sekretariat sowie im Internet bekannt gegeben.
- Weitere Informationen sind dem Aushang „Diplom-Vorprüfungen - Herbst 2007“ vor dem Sekretariat zu entnehmen oder können im Internet unter

  `http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hmiiss072007s/media/vd-info-herbst.pdf`

  abgerufen werden.