Höhere Mathematik II

Lösungen zum 13. Übungsblatt

(1)

O.B.d.A. sei γ eine glatte, im $\mathbb{R}^n$ verlaufende Kurve (ist γ nur stückweise glatt, so folgt die Behauptung, indem man die glatten Teilkurven von γ betrachtet).

Weiter sei $\gamma: \vec{r} = \vec{r}(t) \quad (t \in [a,b])$ eine Parameterdarstellung von γ, und $\gamma^-: \vec{s} = \vec{s}(t) := \vec{r}(-t) \quad (t \in [-b,-a])$ eine Parameterdarstellung der inversen Kurve. Dann ist

$$\int_{\gamma^-} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{-b}^{-a} \vec{v}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{s}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_{-b}^{-a} \underbrace{\vec{v}(\vec{r}(-t)) \cdot (-1)\, \vec{r}\,'(-t)}_{=: f(t)} \, dt \quad \text{mit } f: [-b,-a] \to \mathbb{R}$$

Subst.: $\tau = -t$, $\dfrac{d\tau}{dt} = -1$

$\tau(-b) = b$, $\tau(-a) = a$

$$= \int_{b}^{a} f(-\tau)\,(-1)\, d\tau$$

$$= \int_{a}^{b} \vec{v}(\vec{r}(\tau)) \cdot (-1)\, \vec{r}\,'(\tau)\, d\tau$$

$$= -\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

(2)

Es sei G der Bereich, der von der Kardioide

$$r = a(1+\cos\varphi) \qquad (\varphi \in [0, 2\pi])$$ umschlossen wird.

Eine Parametrisierung von G ist gegeben durch

$$x = r(1+\cos\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r(1+\cos\varphi)\sin\varphi \qquad (\varphi \in [0,2\pi],\ r \in [0,a]).$$

Setzt man $\vec{\psi} : (0,a) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$,

$$\vec{\psi}(r,\varphi) = r \begin{pmatrix} (1+\cos\varphi)\cos\varphi \\ (1+\cos\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix},$$

so gilt $\vec{\psi} \in C^\infty((0,a)\times(0,2\pi))$, $\vec{\psi}$ injektiv und
$\vec{\psi}((0,a)\times(0,2\pi)) = \operatorname{int} G \setminus \{\vec{0}\} = \mathring{G} \setminus \{\vec{0}\}$.

Weiter ist
$$\vec{\psi}'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \cos^2\varphi & r(-\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi) \\ \sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi & r(\cos\varphi - \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi(1+\cos\varphi) & -r\sin\varphi(1+2\cos\varphi) \\ \sin\varphi(1+\cos\varphi) & r(\cos\varphi - 1 + 2\cos^2\varphi) \end{pmatrix},$$

und somit

$$\det \vec{\psi}'(r,\varphi) = r\,[\cos\varphi(1+\cos\varphi)(\cos\varphi - 1 + 2\cos^2\varphi) + \sin^2\varphi(1+\cos\varphi)(1+2\cos\varphi)]$$

$$= r\,[\cos^2\varphi(1+\cos\varphi) + \sin^2\varphi(1+\cos\varphi) - \cos\varphi(1+\cos\varphi) + 2\cos^2\varphi\cos\varphi(1+\cos\varphi) + 2\sin^2\varphi\cos\varphi(1+\cos\varphi)]$$

$$= r\left[\,1+\cos\varphi \;-\cos\varphi\,(1+\cos\varphi) \;+\; 2\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)\right]$$

$$= r\left[\,1+\cos\varphi \;+\; \cos\varphi\,(1+\cos\varphi)\right]$$

$$= r\left[\,1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right] = r\,(1+\cos\varphi)^2 \quad (> 0 \text{ in } (0,a)\times(0,2\pi))$$

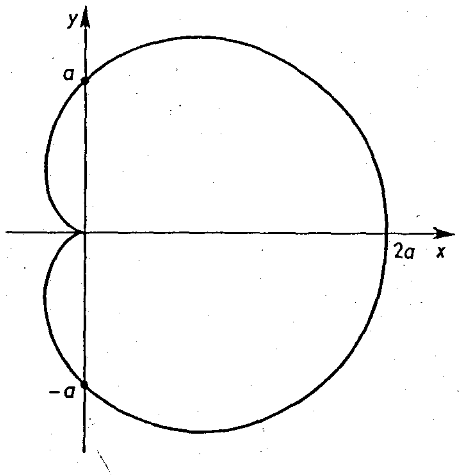
Mit Hilfe der Substitutionsregel erhalten wir:

$$\iint_G 1 \; d(x,y) = \iint_{\mathring{G}\setminus\{\vec{0}\}} 1 \; d(x,y)$$

$$\underset{\text{Subst.}}{=} \iint_{(0,a)\times(0,2\pi)} 1 \cdot |\det \Psi'(r,\varphi)| \; d(r,\varphi)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^a \int_0^{2\pi} r\,(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^a r\,(2\pi+\pi)\, dr = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$



Kardioide

(3) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ gegebene Ellipsenfläche.

Eine Parametrisierung von G ist gegeben durch

$$x = a r \cos\varphi \,, \quad y = b r \sin\varphi$$

mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$.

Definiert man $\vec{\psi} : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{\psi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a r \cos\varphi \\ b r \sin\varphi \end{pmatrix} \,, \quad \text{so ist}$$

$\vec{\psi} \in C^\infty((0,1) \times (0,2\pi))$, $\vec{\psi}$ injektiv und $\vec{\psi}((0,1) \times (0,2\pi)) = \mathring{G} \setminus \{\vec{0}\}$.

Weiter ist

$$\det(\vec{\psi}'(r,\varphi)) = \det \begin{pmatrix} a \cos\varphi & -ar \sin\varphi \\ b \sin\varphi & br \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= rab(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = rab \; (>0)$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel erhalten wir

$$\iint_G 1 \, d(x,y) = \iint_{\mathring{G} \setminus \{\vec{0}\}} 1 \, d(x,y) \underset{\text{Subst.}}{=} \iint_{(0,1)\times(0,2\pi)} 1 \cdot |\vec{\psi}'(r,\varphi)| \, d(r,\varphi)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} rab \, d\varphi \, dr = \int_0^1 2\pi ab \, r \, dr = \pi ab.$$

(4)

Antwort: nein.

Wäre das angegebene Linienintegral wegunabhängig, so müßte für die einfach geschlossene Kurve

$$\gamma: \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

das Linienintegral den Wert 0 ergeben.

Es ist allerdings mit $v_1(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^n}$ und $v_2(x,y) = \frac{x+y}{(x^2+y^2)^n}$

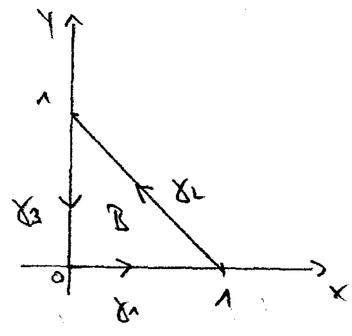
$$\int_\gamma v_1\, dx + v_2\, dy = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi \\ \cos\varphi + \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \, d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

(5) Es gilt

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} \underset{\vec{v}=\binom{P}{Q}}{=} \int_\gamma P\,dx + Q\,dy \underset{\text{Gauß}}{=} \iint_B (Q_x - P_y)\, d(x,y)$$

<u>Skizze:</u>



a) direkt: $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$

γ_1: $\vec{r}(t) = \binom{t}{0} \qquad (t \in [0,1])$

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t\cdot 0 \\ t^2\cdot 0 - 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}.$$

γ_2: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}1-t\\ t\end{pmatrix} \qquad (t \in [0,1])$

$$\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 + t(1-t) \\ (1-t)^2 t - t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t - 3t^2 + t^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 2t - 1\, dt = \left[\tfrac{1}{4}t^4 - t^3 + t^2 - t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

$\gamma_3: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad (t \in [0,1])$

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 + 0(1-t) \\ 0 \cdot (1-t) - (1-t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^2 \, dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t)^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Folglich: $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_2} \dots = -\frac{1}{12}.$

b) Satz von Gauß:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_B 2xy - x \, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} 2xy - x \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy^2 - xy \right]_{y=0}^{1-x} dx$$

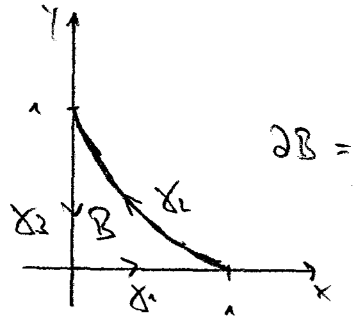
$$= \int_0^1 x(1-x)^2 - x(1-x) \, dx$$

$$= \int_0^1 x^3 - x^2 \, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

(6)

$$B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \ x^{2/3} + y^{2/3} \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$$

Skizze:



$\partial B = \gamma$

Nach dem Gaußschen Satz ist
$$\iint_B \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y) \right) \, d(x,y) = \int_{\partial B} P\,dx + Q\,dy.$$

Wähle $P(x,y) = -xy$, $Q(x,y) = 0$.

Dann ist
$$\iint_B x \, d(x,y) = \int_\gamma (-xy)\,dx$$

γ_1: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in [0,1])$, $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

γ_2: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ $(t \in [0, \frac{\pi}{2}])$, $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3 \sin^2 t \cos t \end{pmatrix}$

γ_3: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$ $(t \in [0,1])$, $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Folglich ist
$$\int_\gamma (-xy)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^3 t \sin^3 t)(-3\cos^2 t \sin t)\,dt$$
$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin^4 t \, dt = 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^2 \sin^4 t \cos t \, dt$$

Substit. $u = \sin t$, $u(0) = 0$

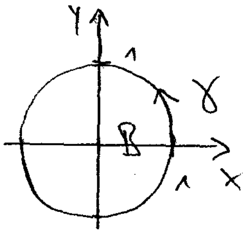
$\frac{du}{dt} = \cos t$, $u(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$= 3 \int_0^1 (1-u^2)^2 \cdot u^4 \, du = 3 \int_0^1 u^4 - 2u^6 + u^8 \, du$$

$$= 3 \left[\frac{1}{5} u^5 - \frac{2}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 \right]_0^1 = \frac{8}{105} .$$

b) $B = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}.$

Skizze:



$$\gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi]) \quad , \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Wähle $P(x,y) = -x^2 y$, $Q(x,y) = xy$, dann ist

$$\iint_B x^2 + y \, d(x,y) = \int_\gamma -x^2 y \, dx + xy \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 2t)^2 \, dt + \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t \right) - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

(7) Die angegebenen Vektorfelder sind jeweils stetig differenzierbar und ihr Definitionsbereich ist einfach zsh. Daher sind die angegebenen Vektorfelder genau dann Potentialfelder, wenn sie die Integrabilitätsbedingungen $J\vec{v} = J\vec{v}^T$ erfüllen.

a) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$. Es ist

$D_2 v_1(x,y) = 3x^2 = D_1 v_2(x,y)$, und folglich besitzt $\vec{v}$ eine Stammfunktion F mit $\nabla F = \vec{v}$.

<u>Ansatz:</u> $F(x,y) = \int^x 3t^2 y \, dt = x^3 y + C(y)$.

$$\frac{d}{dy} F(x,y) = x^3 + C'(y) \overset{!}{=} x^3,$$

also $C'(y) = 0$.

Potential zu $\vec{v}$ ist gegeben durch $F(x,y) = x^3 y$.

b) Das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ z e^x \\ xy \ln z \end{pmatrix}$ ist kein Potentialfeld, da z.B. die folgende Ungleichung gilt:

$$D_1 v_2(x,y,z) = z e^x \neq x^2 = D_2 v_1(x,y,z).$$

c) Die Funktion $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen genau dann, wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ gilt.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - b \\ -3 - c \\ 1 - a \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = 1,\ b = 1,\ c = -3.$$

$\vec{v}$ Potentialfeld $\Leftrightarrow$ $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-3z \\ x+2y+z \\ -3x+y+4z \end{pmatrix}$.

Ermittlung des Potentials F:

$\frac{d}{dx} F(x,y,z) = x+y-3z$

$\Rightarrow F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + h(y,z)$.

$\frac{d}{dy} F(x,y,z) = x + \frac{d}{dy} h(y,z) \stackrel{!}{=} x + 2y + z$

$\Rightarrow h(y,z) = y^2 + yz + g(z)$

Also $F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + g(z)$.

$\Rightarrow \frac{dF}{dz}(x,y,z) = -3x + y + g'(z) \stackrel{!}{=} -3x + y + 4z$

Damit $F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2 + C$

mit $C \in \mathbb{R}$.

d) $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + z + y\,f(xy) \\ 3x^2y - x\,f(xy) \\ x+z \end{pmatrix}$

$\text{rot}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-1 \\ 6xy - f(xy) - xy\,f'(xy) - (2xy + f(xy) + yx\,f'(x,y)) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4xy - 2f(xy) - 2xy\,f'(xy) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad f(xy) + xy\,f'(xy) = 2xy$.

Mit $t = xy$ führt dies auf die Dgl.

$$u' + \frac{1}{t} u = 2 \quad (*).$$

Eine spezielle Lösung von $(*)$ ist gegeben durch $u(t) = t$.

Lösung der homogenen Gleichung:

$$u' = -\frac{1}{t} u \iff \frac{u'}{u} = -\frac{1}{t} \iff \ln u = -\ln t$$

$$\iff \underline{u = e^{-\ln t}} = \frac{1}{t}.$$

Die allg. Lsg. von $(*)$ ist gegeben durch $u(t) = C \cdot \frac{1}{t} + t \quad (C \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow t = xy: \quad f(xy) = \frac{c}{xy} + xy.$$

Bestimme Potential $F(x,y,z)$ zu $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + z + \frac{c}{x} \\ 2x^2y - \frac{c}{y} \\ x+z \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dx} F(x,y,z) \overset{!}{=} 2xy^2 + z + \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = x^2y^2 + xz + c \cdot \ln x + h(y,z)$$

$$\frac{d}{dy} F(x,y,z) = 2x^2y + \frac{d}{dy} h(y,z) \overset{!}{=} 2x^2y - \frac{c}{y}$$

$$\Rightarrow h(y,z) = -c \ln y$$

also: $F(x,y,z) = x^2y^2 + xz + c \ln x - c \ln y + g(z)$

$$\frac{d}{dz} F(x,y,z) = x + g'(z) \overset{!}{=} x+z$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{2} z^2, \quad F(x,y,z) = x^2+y^2 + xz + c \ln \frac{x}{y} + \frac{1}{2} z^2.$$

(Beachte Definitionsbereich von F!)

(8) Wir bestimmen zunächst, welcher Teil $\mathcal{F}_Z$ von $\mathcal{F}$ innerhalb von Z liegt:

$$\vec{r}(u,v) \in Z \Leftrightarrow (u+v)^2 + (u-v)^2 \leq 4 \Longleftrightarrow 2u^2 + 2v^2 \leq 4.$$

Die Fläche $\mathcal{F}_Z$ ist also durch $\vec{r}(u,v)$ mit $(u,v) \in U := \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 2 \}$ gegeben.

Definitionsgemäß ist dann

$$I(\mathcal{F}_Z) = \iint_U \| (D_1\vec{r} \times D_2\vec{r})(u,v) \| \, d(u,v).$$

Hier haben wir

$$D_1\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{pmatrix},$$

also $$(D_1\vec{r} \times D_2\vec{r})(u,v) = \begin{pmatrix} 2u + 2v \\ 2v - 2u \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$I(\mathcal{F}_Z) = \iint_U \sqrt{(2u+2v)^2 + (2v-2u)^2 + 4} \, d(u,v)$$

$$= \iint_U \sqrt{8(u^2+v^2) + 4} \, d(u,v).$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über: $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ ($0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $d(u,v) = r \, d(r,\varphi)$, und erhalten:

$$I(\mathcal{F}_2) = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2\sqrt{2(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) + 1} \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2+1} \, dr$$

$$= \left[\frac{2}{3}\pi \left(2r^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

(9)

Man parametrisiert zunächst den Kegelmantel

$$M = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}\,, \; z \geq 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{\rho}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Es ist

$$(\vec{\rho}_r \times \vec{\rho}_\varphi)(u,v) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \qquad \text{(zeigt nach Außen!)}$$

Weiter ist

$$\vec{f}(\vec{\rho}(r,\varphi)) \cdot (\vec{\rho}_r(r,\varphi) \times \vec{\rho}_\varphi(r,\varphi))$$

$$= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = r\left[(2-r)\cos\varphi + r\sin^2\varphi + (3-r) \right]$$

$$= (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)$$

Für den Fluß durch die Mantelfläche erhält man:

$$\int_M \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2) \, d\varphi \right) dr$$

$$= \int_0^2 \pi r^2 + (3r-r^2)\,2\pi \, dr$$

$$= \left[\frac{\pi}{3} r^3 + \left(\frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right) \cdot 2\pi \right]_0^2$$

$$= 12\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{28}{3}\pi.$$

Nun wird der Grundkreis $G = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 4, \; z=0 \}$ parametrisiert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\rho}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

$$\vec{\rho}_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $(\vec{\rho}_r \times \vec{\rho}_\varphi)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ (zeigt nach innen!)

$$\vec{f}(\vec{\rho}(r,\varphi)) \cdot (\vec{\rho}_r(r,\varphi) \times \vec{\rho}_\varphi(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r.$$

Für den Fluß durch die Grundfläche (nach außen) erhält man:

$$\int_G \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = -\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) dr = -\int_0^2 2\pi \, dr = -4\pi.$$

Der Fluß durch die gesamte Oberfläche beträgt $\frac{28}{3}\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\pi$.