Höhere Mathematik II — SS 2007

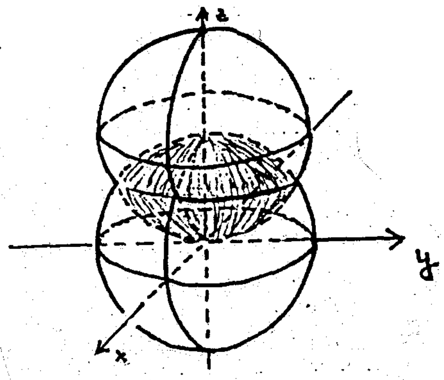
Lösungen zum 14. Übungsblatt

(1)

a) $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1 \right\}$

Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1 — Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Radius 1.

Skizze:



Zylinderkoordinaten:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

oder $\Psi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$,

wobei $1-\sqrt{1-(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

oder $1-\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2}$

und Schnittkörper symmetrisch zur Ebene $z = \frac{1}{2}$.

Somit $x^2+y^2 \le \frac{3}{4}$ und $r \in [0, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Weiter ist $\det \Psi'(r,\varphi,z) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= r$.

Wir erhalten daher mit Hilfe der Substitutionsregel

$$V = \iiint_K d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{1-r^2} - 1\right) r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}r^2 \right]_0^{\sqrt{3}/2} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}\left[\left(1-\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{24}\, d\varphi = \frac{5}{12}\pi .$$

b)

$$K = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 1 \right\}}_{\text{Zylinder}} \cap \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2 \le 1 \right\}}_{\text{Zylinder}}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ -1 \le x \le 1 ,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} ,\ -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \right\}$$

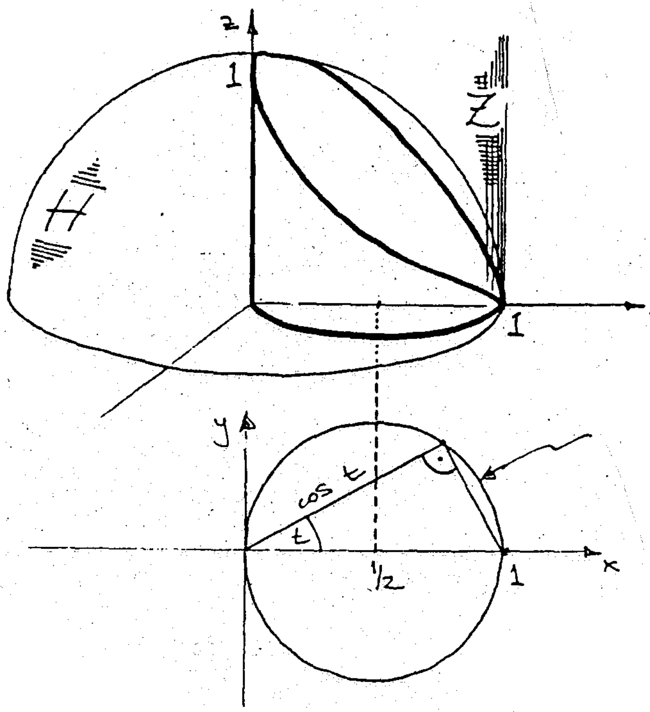
$$V = \iiint_K d(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx$$

$$= 4\left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = 4 \underbrace{\left[2 - \frac{2}{3} \right]}_{= \frac{4}{3}} = \frac{16}{3}$$

② $Z: \quad (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \le (\tfrac{1}{2})^2$

$H: \quad x^2+y^2+z^2 \le 1 \;, \; z \ge 0.$



Grundfläche G

$$x^2 - x + y^2 \le 0$$

bzw.

$$x = r\cos t$$

$$y = r\sin t$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2} \;, \quad 0 \le r \le \cos t$$

Volumen: $$V = \iiint\limits_{H\cap Z} d(x,y,z) = \iint\limits_G \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \; d(x,y)$$

$$= \iint\limits_{\binom{x}{y}\in G} \sqrt{1-x^2-y^2} \; d(x,y)$$

$$\underset{\text{Subst. regel}}{=} \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\cos t} \sqrt{1-r^2} \; r \; dr \; dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\tfrac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\cos t} dt$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(|\sin t|^3 - 1 \right) dt$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, dt = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}.$$

Die Oberfläche besteht aus drei Teilflächen:

1) Grundfläche G (Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}$)

2) „Deckel" F_1

3) Mantel F_2.

zu 1) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 1, \; x^2 - x + y^2 \le 0 \right\}$

<u>Parametrisiere:</u>

$x = r \cos t$ $\qquad$ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = r \cdot \sin t$ $\qquad$ $0 \le r \le \underbrace{\cos t}_{=: r_{max}}$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$

Also: $\vec{x}(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \\ \sqrt{1-r^2} \end{pmatrix}$ $\qquad 0 \le r \le \cos t, \quad |t| \le \frac{\pi}{2}.$

Es ist

$$\frac{d\vec{x}}{dr} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normalenvektor ist

$$\frac{d\vec{x}}{dr} \times \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{r^2 \cos t}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2 \sin t}{\sqrt{1-r^2}}, r \right)^T$$

mit der Länge

$$\left\| \left(\frac{d\vec{x}}{dr} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right)(r,t) \right\| = \sqrt{\frac{r^4}{1-r^2} + r^2} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

Flächeninhalt von F_1:

$$|F_1| = \iint_{(r,t)} \left\| \left(\frac{d\vec{x}}{dr} \times \frac{d\vec{x}}{dt}\right)(r,t) \right\| \, d(r,t)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\cos t} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \, dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\cos t} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - |\sin t|\right) dt \quad = \pi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt \quad = \pi - 2.$$

zu 2): $\quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 - x + y^2 = 0 \;, \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$

<u>Parametrisierung:</u>

$$x = r_{max} \cdot \cos t = \cos^2 t$$

$$y = r_{max} \cdot \sin t = \cos t \sin t$$

$$z = z$$

mit $\quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad$ und $\quad 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 t} = |\sin t|$$

$$\vec{x}(t,z) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin t \cos t \\ z \end{pmatrix} \qquad 0 \leq z \leq |\sin t| \;, \quad |t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t,z) = \begin{pmatrix} -2\sin t\cos t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d\vec{x}}{dz}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \frac{d\vec{x}}{dz} \right)(t,z) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 2\sin t\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \, .$$

Flächeninhalt von F_2:

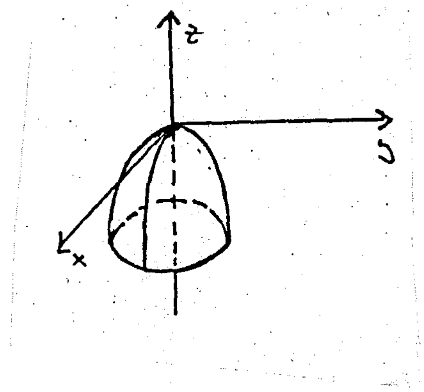
$$|F_2| = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{|\sin t|} dz \, dt = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 2 \, .$$

Gesamter Inhalt der Oberfläche:

$$\frac{\pi}{4} + (\pi - 2) + 2 = \frac{5}{4}\pi \, .$$

③ $B=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 1 \; , \; -1 \le z \le -(x^2+y^2) \right\}$

Skizze:



$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2z \\ -x^2yz \\ z \end{pmatrix}$$

Nach dem Gaußschen Satz gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{B} \operatorname{div} \vec{f} \; d(x,y,z) \qquad \text{mit } \mathcal{F} = \partial B .$$

1) $(\operatorname{div} \vec{f})(x,y,z) = y^2z - x^2z + 1$

Zylinderkoordinaten:

$x = r\cos\varphi \qquad\qquad r \in [0,1]$

$y = r\sin\varphi \qquad$ mit $\qquad \varphi \in [0,2\pi]$ und $\det\left(\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right) = r$

$z = z \qquad\qquad -1 \le z \le -r^2$

Somit: $$\int_B \operatorname{div} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-r^2} \left(\left(r^2\sin^2\varphi - r^2\cos^2\varphi \right) z + 1 \right) r \; dz\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[r^3\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) \tfrac{1}{2} z^2 + rz \right]_{-1}^{-r^2} d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} r^7 \cos 2\varphi - r^3 + \frac{1}{2} r^3 \cos 2\varphi + r \; d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} \sin 2\varphi \, (r^3 - r^7) + (r - r^3)\, \varphi \right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^1 2\pi (r - r^3) \, dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} .$$

2. Oberflächenintegral

∂B besteht aus zwei Teilflächen:

$F_1 = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \, , \; z = -1 \}$

$F_2 = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \, , \; z = -(x^2 + y^2) \}$

$$\iint_F \vec{f} \cdot d\vec{o} = \iint_{F_1} \vec{f} \cdot d\vec{o} + \iint_{F_2} \vec{f} \cdot d\vec{o} = I_1 + I_2 .$$

i) Parameterdarstellung von F_1:

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$ mit $r \in [0,1] \, , \; \varphi \in [0, 2\pi]$

$z = -1$

kurz: $\vec{x}_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{d}{dr} \vec{x}_1 \times \frac{d}{d\varphi} \vec{x}_1 \right)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Folglich $\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (äußerer Normaleneinheitsvektor).

$$I_1 = \iint_{F_1} \vec{f} \cdot d\vec{o} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{x}_1(r,\varphi)) \cdot \vec{N}_0 \cdot \underbrace{\left\|\left(\frac{d}{dr}\vec{x}_1 \times \frac{d}{d\varphi}\vec{x}_1\right)(r,\varphi)\right\|}_{=r} \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi \\ r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr = 2\pi \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^1 = \pi$$

ii) Parameterdarstellung von F_2:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= -r^2 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} r &\in [0,1] \\ \varphi &\in [0,2\pi] \end{aligned} \qquad \vec{x}_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -r^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{d}{dr}\vec{x}_2 \times \frac{d}{d\varphi}\vec{x}_2\right)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

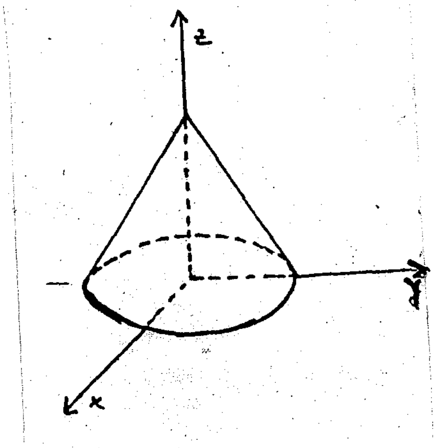
$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{x}_2(r,\varphi)) \cdot \left(\frac{d}{dr}\vec{x}_2 \times \frac{d}{d\varphi}\vec{x}_2\right)(r,\varphi) \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -r^5 \cos\varphi \sin^2\varphi \\ r^5 \cos^2\varphi \sin\varphi \\ -r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^3 \, d\varphi \, dr = 2\pi \left[-\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}$$

④

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-z \\ x^3+yz \\ -3+y^2 \end{pmatrix}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2-\sqrt{x^2+y^2} \right\}$$



Nach dem Gaußschen Satz ist

$$\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot d\vec{o} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{f} \cdot d(x,y,z).$$

Es ist $\operatorname{div} \vec{f} = -1 + z$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & & r \in [0,2] \\ y &= r\sin\varphi & \text{mit} \quad & \varphi \in [0,2\pi] \\ z &= z & & 0 \le z \le 2-r \end{aligned}$$

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{f} \; d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{2-r} (1+z)\, r \; dz\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \left[z + \tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^{2-r} dr\, d\varphi$$

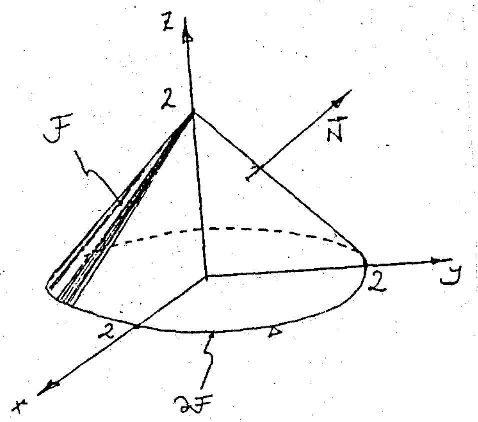
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \left[2-r + \tfrac{1}{2}(2-r)^2 \right] dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r - 3r^2 + \tfrac{1}{2} r^3 \; dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - r^3 + \tfrac{1}{8} r^4 \right]_0^2 d\varphi$$

$$= 4\pi.$$

5

Skizze:



Parametrisierung von F:

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\quad z = 2 - r \qquad \text{mit } 0<r<2,\ 0<t<2\pi.$$

$$\frac{d}{dr}\vec{x}(r,t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ -1\end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{dt}\vec{x}(r,t) = \begin{pmatrix}-r\sin t\\ r\cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

Die nach außen (d.h. vom Kegelinnern weg) zeigende Normale ist (evtl. bis auf das Vorzeichen)

$$\left(\frac{d}{dr}\vec{x} \times \frac{d}{dt}\vec{x}\right)(r,t) = \begin{pmatrix}r\cos t\\ r\sin t\\ r\end{pmatrix} = \vec{N}$$

Es ist auf F

$$\operatorname{rot}\vec{f}\,\Big|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in F} = \begin{pmatrix}-6xy - y\\ -1 + 3y^2\\ 3x^2\end{pmatrix}\Bigg|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in F}$$

$$= \begin{pmatrix}-6r^2\cos t\sin t - r\sin t\\ 3r^2\sin t - 1\\ 3r^2\cos^2 t\end{pmatrix}$$

Und damit:

$$\iint_F \operatorname{rot}\vec{f}\cdot d\vec{o} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \operatorname{rot}\vec{f}\Big|_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\vec{x}(r,t)} \cdot \vec{N}(r,t)\; dr\, dt$$

$$= \int_0^{2}\int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{-6r^3\cos^2 t\sin t - r^2\sin t\cos t + 3r^3\sin^3 t - r\sin t}_{} + 3r^3\cos^2 t \Big)\; dt\, dr$$

Integration von 0 bis 2π ergibt 0.

$$= \int_0^{2}\int_0^{2\pi} 3r^3\cos^2 t\; dt\, dr \quad dt\, dr = 3\pi\int_0^2 3r^3\, dr$$

$$= 3\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 12\pi.$$

ii) Berandung von F ist Schnitt von F mit der x-y-Ebene $z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4$

$$\partial F:\quad x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t \quad (0<t<2\pi),\quad z=0$$

(Beachte Durchlaufsinn; Rechte-Hand-Regel)

Nach Stokes: $$\iint_F \operatorname{rot}\vec{f}\cdot d\vec{o} = \int_{\partial F}\vec{f}\cdot d\vec{s}.$$

$$\int_{\partial F}\vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}2\cos t - 0\\ 8\cos^3 t + 0\\ -24\cos t\sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\\ 0\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-4\sin t\cos t + 16\cos^4 t\right) dt$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = 16 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \sin^2 t \cos^2 t \right) dt$$

$$= 16\pi - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt = 16\pi - 4\pi = 12\pi .$$

<u>Bemerkung:</u> Oft benutzt man den Satz von Stokes, um ein Kurvenintegral

$$\int_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

auf einfacher Art, nämlich durch Auswertung von $\iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{o}$, zu berechnen.

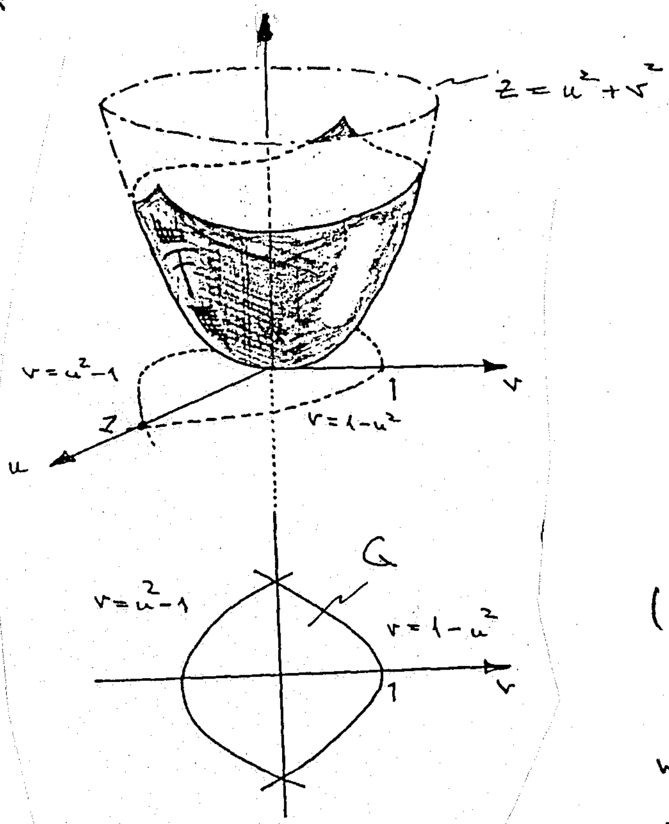
Dass hier das Flussintegral mehr Mühe als das Kurvenintegral bereitet, liegt an der Wahl der Fläche F (nämlich hier des Kegels) mit ∂F (Kreis $x^2+y^2=4$, $z=0$) als Rand.

Würde man hier F als Kreisfläche

$$F: \; x^2+y^2 \leq 4 \; , z=0$$

wählen ($\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), so würde man das erwünschte Resultat sehr viel schneller erhalten (nachrechnen!).

6 Skizze:



Normale an F ist

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

(zeigt ins Innere des Paraboloids; Richtung später wichtig beim Orientieren der Randkurve.)

$$\operatorname{rot} \vec{f}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y-1 \\ 1 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{also auf } F$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}\,(x,y,z)\Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}(u,v)} = \begin{pmatrix} 2v-1 \\ 1 \\ 3u^2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{o} = \iint_{(u,v)\in G} \begin{pmatrix} 2v-1 \\ 1 \\ 3u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v)$$

$$= \int_{u=-1}^{1} \int_{v=u^2-1}^{1-u^2} \left(3u^2 - 4uv + 2u - 2v \right) dv\, du$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[3u^2 v - 2uv^2 + 2uv - v^2 \right]_{v=u^2-1}^{1-u^2} du$$

$$= \int_{-1}^{1} (3u^2+2u)(2-u^2) \; du$$

$$= \int_{-1}^{1} 6u^2 - 6u^4 + 4u - 2u^3 \; du$$

$$= \left[2u^3 - \frac{6}{5}u^5 \right]_{-1}^{1} = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5} .$$

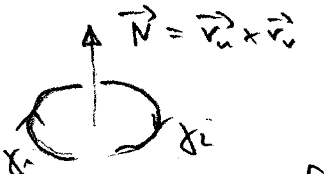
Der Rand von F besteht aus

$$\gamma_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}_{\Big| v = u^2-1} = \begin{pmatrix} u \\ u^2-1 \\ u^4-u^2+1 \end{pmatrix} \qquad (u \in [-1,1])$$

$$\gamma_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}_{\Big| v = 1-u^2} = \begin{pmatrix} u \\ 1-u^2 \\ u^4-u^2+1 \end{pmatrix} \qquad (u \in [-1,1])$$

Achtung: Die Orientierung von γ_2 entspricht so noch nicht der Recht-Hand-Regel.

Also: $\gamma_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ 1-u^2 \\ u^4-u^2+1 \end{pmatrix} \qquad 1 \geq u \geq -1 .$



$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{u=-1}^{1} \underbrace{\begin{pmatrix} u^4-u^2+1 \\ u^3+u^4-u^2+1 \\ (u^2-1)^2+u^4-u^2+1 \end{pmatrix}}_{\vec{f}(\vec{r}(u,v))} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 4u^3-2u \end{pmatrix}}_{= r'(u,v)} du \quad |$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{u=1}^{-1} \begin{pmatrix} u^4 - u^2 + 1 \\ u^3 + u^4 - u^2 + 1 \\ (1-u^2)^2 + u^4 - u^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2u \\ 4u^3 - 2u \end{pmatrix} du$$

$$\int_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} u^5 + u^4 - u^2 + u \; du = \frac{8}{5} .$$