Höhere Mathematik II

SS 2007

Aufgaben zur 1. Übung (20.4.07)

① Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ ein Intervall, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, sowie $f, g \in C(I)$.

Differentialgleichungen der Form $y' + f(x) \cdot y = g(x)\, y^{\alpha}$ werden <u>Bernoullische Differentialgleichungen</u> genannt.

Eine Möglichkeit, diese zu lösen, wurde in der Vorlesung vorgestellt.

Andere Möglichkeit: Mache den Ansatz $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$.

Dann ist $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

(Achtung: evtl. Vorzeichenbetrachtungen für $y(x)$ notwendig.)

Damit erhält man

$$y' = \frac{1}{1-\alpha}\, z^{\frac{1}{1-\alpha} - 1} \cdot z' = \frac{1}{1-\alpha}\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z'.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{1}{1-\alpha}\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' + f(x)\, z^{\frac{1}{1-\alpha}} = g(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

und somit

$$\frac{1}{1-\alpha}\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left[z' + (1-\alpha) f(x)\, z - (1-\alpha)\, g(x) \right] = 0.$$

Läßt man die triviale Lösung $y(x) = 0$ außer Acht, dann gibt es Intervalle, in denen $z(x) \neq 0$ gilt, und man muss dann die inhomogene lineare Dgl

$$z' + (1-\alpha) f(x) z = (1-\alpha) g(x)$$ lösen.

Durch Rücksubstitution erhält man dann die allgemeine Lösung der Bernoullischen Dgl.

② Noch ein Dgl.-typ: Differentialgleichungen der Form

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

mit Koeffizientenfunktionen a, b, c, die in einem gemeinsamen Intervall stetig sind, werden Riccatische Dgln. genannt.
(Hierbei wird $a = 0$ oder $c = 0$ ausgeschlossen, denn
$a = 0$: Bernoulli-Dgl., $c = 0$: lineare Dgl.).

Im allgemeinen sind Lösungen dieser Dgl. nicht in geschlossener Form darstellbar.
Ist jedoch eine Lösung $y_1(x)$ bekannt, dann führt man die Substitution

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$ durch.

Geht man mit $$y'(x) = y_1'(x) - \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$$

in die Riccatische Dgl ein, so erhält man

$$y_1' - \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = a(x) + b(x)y_1(x) + b(x)\frac{1}{u(x)}$$

$$+ c(x)(y_1(x))^2 + 2c(x)\frac{y_1(x)}{u(x)} + c(x)\frac{1}{(u(x))^2},$$

und, da y_1 die Dgl erfüllt, somit nach Multiplikation mit $(u(x))^2$:

$$(*) \quad u' + b(x)\,u + 2c(x)\,y_1(x)\,u + c(x) = 0 .$$

Dies ist eine inhomogene lineare Dgl.

Man kann zeigen, dass sich alle Lösungen der Riccatischen Dgl schreiben lassen als

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)} \quad \left(\text{oder } y(x) = y_1(x)\right),$$

wobei u die Lösungen der Dgl. (*) durchläuft.

(Insbesondere ist dies unabhängig von der speziellen Lösung y_1.)

③ Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Dgl

$$(**) \quad y' = -x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + \left(2x + \frac{1}{2}\right)y - y^2 .$$

Lösung: Es handelt sich um eine Riccatische Dgl.

Da die Koeffizientenfunktionen Polynome sind, macht man zur Bestimmung einer speziellen Lösung einen Polynomansatz. Vergleicht man die dann auftretenden x-Potenzen, stellt man fest, dass nur ein Polynom ersten Grades in Frage kommt.

Geht man mit dem Ansatz $y(x) = ax + b$ in die Dgl. ein, so erhält man

$$(-a^2 + 2a - 1)x^2 + \left(-2ab + \frac{1}{2}a + 2b - \frac{1}{2}\right)x - b^2 + \frac{1}{2}b + 1 - a = 0 .$$

Wie man sieht, kann diese Bedingung nur für

$$a = 1 , \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad b = \frac{1}{2}$$

erfüllt sein.

Mittels Einsetzen bestätigt man, dass die Polynome

$$y_1(x) = x , \quad y_2(x) = x + \frac{1}{2}$$

spezielle Lösungen der Dgl. sind.

Um Rechenarbeit zu sparen, verwenden wir die Lösung $y_1(x) = x$.

Die Substitution $y(x) = x + \dfrac{1}{u(x)}$ ergibt dann gemäß der Gleichung (*) von ② die lineare Dgl.

$$u' = -\frac{1}{2} u + 1$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x) = C e^{-\frac{1}{2}x} + 2 \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Also ist

$$y(x) = x + \frac{1}{C e^{-\frac{1}{2}x} + 2} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der Riccatischen Dgl.

(Bemerkung: Die spezielle Lösung $y_1(x) = x$ erhält man formal für $C \to \infty$.)