

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

- a) Beweisen Sie, dass für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass mit $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)g(t) dt$ ein Skalarprodukt auf der Menge der stetigen Funktionen definiert wird.

- b) Zeigen Sie allgemein, dass man für jede stetige Funktion $w : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ ein Skalarprodukt auf der Menge der stetigen Funktionen definieren kann durch

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f(t)g(t)w(t) dt.$$

- c) Seien nun $a = 1$, $b = 2$ und $w(x) = \ln x$. Das Skalarprodukt aus Teil b) erzeugt die Norm $\|f\|_w := (\langle f, f \rangle_w)^{1/2}$.

(i) Berechnen Sie $\|f\|_w$ für $f(x) := \sqrt{x}$.

(ii) Finden Sie ein Polynom erster Ordnung also $p(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$, das bezüglich diesem Skalarprodukt senkrecht auf die konstante Funktion $k(x) = 1$ steht (also $\langle p, k \rangle_w = 0$).

Aufgabe 2 (Ü) Sei V die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ für welche das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t) dt$ konvergiert. Für $f, g \in V$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t) dt.$$

- a) Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$, dieses Integral absolut konvergiert.

Tip: Betrachten Sie $\int_0^M e^{-t} f(t)g(t) dt$ und benutzen Sie Aufgabe 1.

- b) Zeigen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in V .

- c) Berechnen Sie $T_n := \langle f, g_n \rangle$ für $f(t) = e^{-t}$ und $g_n(t) = t^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Tip: Berechnen Sie zuerst T_0 und dann eine Rekursionsvorschrift ($T_{n+1} = \dots$).

Aufgabe 3 (T) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.

Das Vektor- oder Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ (oder auch des $\mathbb{C}^3$) ist definiert als

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Die Kombination von Kreuz und Skalarprodukt wird auch Spatprodukt genannt; das heißt das Spatprodukt von $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ ist gegeben durch $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ (siehe Aufgabenteil e)).

- a) Betrachten Sie zuerst die unten stehenden Terme und machen Sie sich klar, was diese verschiedenen Produkte (Kreuzprodukt, Skalarprodukt, Spatprodukt und Multiplikation mit einer Zahl) bedeuten, sowohl formal als auch geometrisch. Dazu können Sie etwa auch die Aussagen betrachten, die sie in dieser Aufgabe nachrechnen sollen.

Zeigen Sie durch einfache Rechnung die folgenden Aussagen:

b) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = 0,$

c) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z},$
 $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x},$

d) $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y},$

e) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}.$

Wichtige Bemerkung dazu: Diese Zahl wird später als Determinante derjenigen 3×3 -Matrix bezeichnet, deren Spalten aus den Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ bestehen.

Aufgabe 4 (T)

a) Seien $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Geben Sie eine ON-Basis von $\text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ an.

b) Seien $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$

Geben Sie eine ON-Basis von $\text{Lin}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ an.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

- a) U , V und W seien $\mathbb{C}$ -Vektorräume. Zeigen Sie dass für $f \in \mathcal{L}(U, V)$ und $g \in \mathcal{L}(V, W)$ die Abbildung $g \circ f$ eine lineare Abbildung von U nach W ist.
- b) Sei U ein n -dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass U isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist.
- c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ und $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$. Wir definieren die folgenden linearen Abbildungen:

$$\begin{aligned} P_{\vec{x}} : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n, & P_{\vec{x}}(\vec{y}) &:= (\vec{y} \cdot \vec{x})\vec{x}, \\ K_{\vec{z}} : \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3, & K_{\vec{z}}(\vec{y}) &:= \vec{z} \times \vec{y}, \\ D : \mathbb{C}^1((0, 1)) &\rightarrow \mathbb{C}((0, 1)), & (Df)(x) &:= f'(x), \\ I : \mathbb{C}([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{C}([0, 1]), & (If)(x) &:= \int_0^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Machen Sie sich kurz klar, dass es sich wirklich jedesmal um eine lineare Abbildung handelt. Berechnen Sie Bild und Kern jeder dieser Abbildungen.

Aufgabe 2 (T)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

- a) Ist $x \in V$ und gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.
- b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig, und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.
- c) Es seien $x_1, \dots, x_n, y \in V$. Ist $y \neq 0$ und ist y orthogonal zu jedem Vektor aus $L(x_1, \dots, x_n)$, so folgt $L(x_1, \dots, x_n) \neq V$.
- d) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.
- e) Wenn die lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ nicht injektiv ist, so gibt es $x \in V$ mit $x \neq 0$ und $f(x) = 0$.
- f) Ist $f : V \rightarrow V$ linear, so gilt dies auch für die Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $g(x) := \|f(x)\|$ definiert ist.

Aufgabe 3 (T)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7y \\ ix + y \\ 3x - 4iy \end{pmatrix}$

b) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7y + 2 \\ ix + y \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x - i)(y + 4)$

d) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x - 2i)(y + 3) - (x + 1)(y - 6i)$

Aufgabe 4 (T)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1 - i \\ 2 + i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese:

$$A + B, \quad A + C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A + B)C, \quad A^*C, \quad C^T B$$

Aufgabe 5 (Ü)

Wir betrachten nun den Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. (Diese erzeugt die Norm $\|f\| = (\langle f, f \rangle)^{1/2}$.)

Die Polynomfunktionen auf $[-1, 1]$ vom Grad kleiner gleich n bilden einen Untervektorraum U_n der Dimension $n + 1$. Finden Sie eine ONB von U_0 , ergänzen Sie diese zu einer ONB von U_1 und schließlich zu einer ONB von U_2 . Die Elemente dieser Basis heißen Legendre-Polynome. Diese können nun verwendet werden, um eine gegebene stetige Funktion möglichst gut (bezüglich der gegebenen Norm) durch Polynome anzunähern. Im Gegensatz zur Annäherung durch ein Taylorpolynom, die in einer kleinen Umgebung des Entwicklungspunktes extrem gut ist, ist hier die Näherung auf dem ganzen Intervall gut (nicht unbedingt punktweise, aber im Integral).

Finden Sie nun, für $m = 0, 1, 2$, diejenige Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich m , welche die Funktion $f(x) = |x|$ bezüglich der gegebenen Norm möglichst gut annähert.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

- a) Finden sie die Werte von $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad (e \ f \ g \ h) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 0 \ 0 \ 9).$$

- b) Finden sie die Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

- c) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie alle Matrizen L und R , für die gilt $LA = 0$ bzw. $AR = 0$.

Aufgabe 2 (T)

Bestimmen Sie eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{(3,3)}$, die der folgenden Gleichung genügt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3-i & 1 \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = X + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (T)

Betrachten Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β , ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 4 (Ü)

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ soll durch Zeilenoperationen umgeformt werden. Bestimmen Sie für jede mögliche Zeilenoperation eine Matrix B , so dass BA die Matrix ist, die sich nach Ausführen der Zeilenoperation ergibt.

Aufgabe 5 (T)

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (Ü)

- a) Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $||\vec{a}|| = 1$ (also $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$). Berechnen Sie eine zugehörige Matrix $[P_{\vec{a}}]$ zu der linearen Abbildung

$$P_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad P_{\vec{a}}(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a}$$

aus Beispiel 1.1 der Vorlesung (Abschnitt 20.9. der Vorlesungszusammenfassungen).

- b) Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie eine zugehörige Matrix $[K_{\vec{x}}]$ zu der linearen Abbildung

$$K_{\vec{x}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad K_{\vec{x}}(\vec{z}) = \vec{z} \times \vec{x}$$

aus Beispiel 1.2 der Vorlesung.

- c) Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear mit

$$T(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \quad T(e_2 + e_3) = e_1, \quad T(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3.$$

Berechnen Sie eine zugehörige Matrix $[T]$

Hinweise In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termine für die Übungsklausuren Herbst 2008 :

erste Übungsklausur HM II: Samstag, 24.5.2008, 09.00-11.00 Uhr

zweite Übungsklausur HM II: Samstag, 05.7.2008, 09.00-11.00 Uhr

Für die **Physiker** werden in der Woche vom 12.5. bis 16.5. Listen aushängen in denen Sie sich eintragen können, um sich für die erste Übungsklausur anzumelden.

Alle **E-Techniker** und **Geodäten** schreiben die erste Übungsklausur im **Gerthsen Hörsaal**. Eine Anmeldung hierfür ist **nicht** nötig.

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (T)

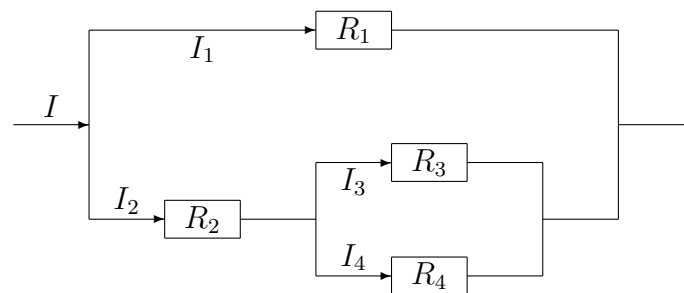
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$ für welche die Determinante von $A - \lambda I$ gleich Null ist (mit I ist die Einheitsmatrix gemeint).
- Machen Sie sich klar, dass für jedes solche $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Vektor $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existiert, so dass gilt $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Aufgabe 3 (T)

Gegeben ist die folgende Gleichstromschaltung:



Es gelte $I = 1$ und $R_1 = R_2 = R_3 = \alpha$ sowie $R_4 = \beta$.

- Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Ströme I_1 bis I_4 auf.
- Bestimmen Sie (für beliebige Konstanten α und β) alle Lösungen, und machen Sie sich klar, dass das Gleichungssystem für alle physikalisch sinnvollen Werte der Konstanten eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4 (Ü)

Bestimmen Sie die Determinanten der reellen (n, n) -Matrizen $A = ((a_{ij}))$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ -j & \text{für } i = j + 1 \\ j - 1 & \text{für } i = j - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist.

Aufgabe 5 (Ü)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$. Die Matrix $A_n(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei gegeben durch

$$A_n(t) := \begin{pmatrix} 1+t^2 & t & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t & 1+t^2 & t & 0 & & & \vdots \\ 0 & t & 1+t^2 & t & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & 0 & t & 1+t^2 & t & 0 \\ \vdots & & & 0 & t & 1+t^2 & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A_n(t))$ in Abhängigkeit von n und t .

Hinweis: Setzen Sie $b_n := \det(A_n(t))$ und berechnen Sie b_0, b_1 . Finden Sie eine Rekursionsformel für diese Folge, indem Sie nach der ersten Zeile entwickeln. Berechnen Sie damit weitere Folgenglieder, bis Sie eine explizite Darstellung der Folge erraten. Beweisen Sie diese anschließend.

Aufgabe 6 (Ü)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $b, c \in \mathbb{R}, b \neq c$. Weiter sei die (n, n) -Matrix A_x gegeben durch

$$A_x = \begin{pmatrix} x & b-x & \dots & \dots & \dots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \dots & \dots & \dots & c-x & x \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie: $p(x) := \det A_x$ ist ein Polynom in x mit Grad höchstens 1.
- Berechnen Sie die Koeffizienten dieses Polynoms durch Einsetzen geeigneter Werte für x .
- Seien nun $n = 3$, $b = 1$ und $c = -1$. Wie viele Lösungen $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ hat die Gleichung $A_x \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von x ?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termine für die Übungsklausuren Herbst 2008 :

erste Übungsklausur HM II: Samstag, 24.5.2008, 09.00-11.00 Uhr

zweite Übungsklausur HM II: Samstag, 05.7.2008, 09.00-11.00 Uhr

Für die **Physiker** werden in der Woche vom 12.5. bis 16.5. Listen aushängen in denen Sie sich eintragen können, um sich für die erste Übungsklausur anzumelden.

Alle **E-Techniker** und **Geodäten** schreiben die erste Übungsklausur im **Gerthsen Hörsaal**. Eine Anmeldung hierfür ist **nicht** nötig.

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach $\mathbb{C}$?
- $\det I_n = n$?
- $\det(AB) = \det A \det B$?
- $\det(A^{-1}) = \det A$?
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\det(C^{-1}C^\top C^2 C^\top C^{-1}) = (\det C)^2$?
- $\det(A + B) = \det A + \det B$?
- $\det((\det A)B) = (\det A)^n \det B$?

Aufgabe 2 (T)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen regulär sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (T)

Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ gegeben. Für jedes $\phi > 0$ wird durch

$$f_\phi(\vec{x}) := (\cos \phi)\vec{x} + (\sin \phi)(\vec{a} \times \vec{x}) + (1 - \cos \phi)(\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a}$$

eine Abbildung $f_\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert.

- Zeigen Sie, dass f_ϕ eine lineare Abbildung ist, und geben Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis an.
- Bestimmen Sie $f_\phi(\vec{a})$ und $f_\phi(\vec{c})$ für einen beliebigen Vektor $\vec{c}$, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht. Deuten Sie die Abbildung geometrisch.
- Rechnen Sie nach, dass $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$ gilt.

Aufgabe 4 (T)

Ergänzen Sie jeweils einen Vektor, so dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden. Ist der zu ergänzende Vektor eindeutig bestimmt?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (Ü)

Stellen Sie die Permutation π jeweils als Produkt von Transpositionen dar. Ist π gerade oder ungerade? Bestimmen Sie die Fehlstandsanzahl $f(\pi)$.

$$\text{a) } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (Ü)

Zeigen Sie: Hat die Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ den Rang r , und sind $U, V \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ reguläre Matrizen, so hat auch die Matrix UAV den Rang r .

Aufgabe 7 (Ü)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ sei orthogonal. Zeigen Sie, dass es dann gewisse Zahlen $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$ gibt, so dass gilt:

$$A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (Ü)

Wir suchen eine Lösung der Gleichung $\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -6x + 4y$.
Diese Gleichung kann man äquivalent umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

für ein $A \in \mathbb{R}^{2,2}$. Wäre nun A eine Diagonalmatrix (das heißt $a_{12} = a_{21} = 0$), so wären dies zwei entkoppelte Probleme der Art $\dot{z} = az$, welche leicht zu lösen wären. Um auf eine solche Gestalt zu kommen führen wir neue Variablen u und v ein mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für eine noch zu ermittelnde Matrix C , also $C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Setzen Sie dies in Gleichung (1) ein. Durch eine einfache Umformung erhalten Sie damit eine äquivalente Gleichung der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wie sieht Matrix D aus (in Abhängigkeit von C)? Finden Sie eine geeignete Matrix C , so dass D eine Diagonalmatrix ist (siehe Vorlesung!). Lösen Sie für dieses C die Gleichung (2) und finden Sie damit die Lösungen von Gleichung (1).

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Aufgabe 2 (T) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und geben sie eine reguläre Matrix C an, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3 (T) (Letzte HM II Klausuraufgabe)

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Geben Sie die geometrische und die algebraische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.
- c) Geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von M an.
- d) Entscheiden Sie, ob M diagonalisierbar ist. Begründen Sie dies auf zwei Arten.

Aufgabe 4 (Ü) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ nennen wir *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gibt, so dass die beiden Matrizen $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- a) Sind A, B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.
- b) Haben alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit 1 und gilt $AB = BA$, so sind A, B simultan diagonalisierbar.

Hinweise: Zu **a)**: Machen Sie sich **zuerst** klar, dass die Aussage für diagonale Matrizen gilt (also etwa auch für A und B im Falle, dass $C = E$).

Zu **b)**: Wie sehen die Spalten einer Basiswechselmatrix aus? Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

Aufgabe 5 (Ü) Wir betrachten den Raum l^2 , der quadratsummierbaren Folgen in $\mathbb{R}$, das heißt

$$l^2 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum a_n^2 < \infty\}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte, sowie die Dimensionen der Eigenräume der Rechtsverschiebung R und der Linksverschiebung L , das sind die linearen Funktionen:

$$\begin{aligned} L : l^2 &\rightarrow l^2, \quad L((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, \\ R : l^2 &\rightarrow l^2, \quad R((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (a_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}, \text{ mit } a_0 := 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Ü) Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

R sei die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $\text{Lin}(\vec{v}, \vec{w})$.

S sei die Spiegelung des $\mathbb{R}^4$ an $\text{Lin}(\vec{x}, \vec{y})$, und T sei die Spiegelung des $\mathbb{R}^4$ an der Hyperebene $\text{Lin}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Geben Sie jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren an.

Aufgabe 7 (Ü) Seien S, T lineare Funktionen in einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum. x sei ein Eigenvektor von beiden Funktionen, mit $Tx = \lambda x$ und $Sx = \mu x$. Zeigen Sie:

- x ist ein Eigenvektor von $S + T$ und von $5T$ zum Eigenwert $\lambda + \mu$ bzw. zum Eigenwert 5λ .
- x ist ein Eigenvektor von T^2 zum Eigenwert λ^2 , allgemeiner von T^n zum Eigenwert λ^n . Ganz allgemein gilt für ein Polynom p , dass x ein Eigenvektor von $p(T)$ ist zum Eigenwert $p(\lambda)$.
- Ist ν^2 ein positiver Eigenwert von T^2 , so ist ν oder $-\nu$ ein Eigenwert von T . (Hinweis: betrachte $(T - \nu E)(T + \nu E)$.)
- Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Funktion R ohne Eigenwerte, für die R^2 jedoch einen Eigenwert hat.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)

Gegeben sei die reelle, symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Äquivalenz besteht:

$$A \text{ ist positiv definit} \iff a_1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} > 0, \quad \det(A) > 0.$$

Geben Sie ein entsprechendes Kriterium für „negativ definit“ an.

Aufgabe 2 (T)

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind. Sie können dazu das Ergebnis aus Aufgabe 1 benutzen.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n}, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k - l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (T)

Betrachten Sie den folgenden Kegelschnitt (Quadrik).

$$Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 9x_2 = 0.$$

Bringen Sie diesen Kegelschnitt auf Normalform wie folgt: Schreiben Sie Q in der Form $\vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} = 0$ mit symmetrischem A . Diagonalisieren Sie A mit einer orthogonalen Basiswechselmatrix, d.h. finden Sie eine reguläre orthogonale Matrix V , so dass $V^T A V$ Diagonalgestalt hat.

Setzen Sie $\vec{x} := V \vec{z}$ und setzen Sie dies in die Gleichung des Kegelschnitts ein. Ergänzen Sie quadratisch zu einer Gleichung die einer der folgenden Gestalten hat

$$a_1(z_1+b_1)^2 + a_2(z_2+b_2)^2 + c = 0, \quad a_1(z_1+b_1)^2 + a_2(z_2+b_2) = 0 \quad \text{oder} \quad a_1(z_1+b_1) + a_2(z_2+b_2)^2 = 0.$$

Führen Sie nun erneut neue Variablen ein, nämlich $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $y_1 = z_1 + b_1$ und $y_2 = z_2 + b_2$. Wie sieht Q in den neuen Variablen aus? Was für eine Gestalt hat Q geometrisch?

Mit welcher Koordinatentransformation erhält man $\vec{y}$ aus $\vec{x}$.

Aufgabe 4 (Ü) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

- a) Zeigen Sie, dass man im $\mathbb{R}^n$ durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A := \vec{y}^T A \vec{x}$ ein Skalarprodukt definieren kann.
- b) Unser Ziel ist es nun, ein Verfahren (das sogenannte CG-Verfahren) zu erlernen, mit dem man schnell eine Lösung der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ berechnen kann (bei vorgegebenem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$). Zur Erinnerung: A ist symmetrisch und positiv definit. Das ist für dieses Verfahren nötig.

Im Folgenden gebrauchen wir neben dem mit A gewichteten Skalarprodukt noch die zugehörige Norm $\|\vec{z}\|_A = (\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle_A)^{1/2}$ und auch die Euklidische Norm $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \vec{z}^T \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{z}$ im $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie zuerst folgendes: Ist $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j \rangle_A = \vec{b}_k^T A \vec{b}_j = \delta_{jk}$, so ist $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j$ die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

(Hinweis: zeigen Sie $\langle A\vec{x}, \vec{b}_k \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}_k \rangle$.)

Um eine solche Basis zu erhalten, wenden wir eine Verallgemeinerung des Gram-Schmidt Verfahrens an: Seien $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ linear unabhängig. Im ersten Schritt wählen wir $\vec{d}_1 := \vec{r}_1$ und normieren diesen zu $\vec{b}_1 := \vec{d}_1 / \|\vec{d}_1\|_A$.

Für $2 \leq k \leq n$ setzen wir im k -ten Schritt: $\vec{d}_k := \vec{r}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j$, und normieren diesen wieder zu $\vec{b}_k := \vec{d}_k / \|\vec{d}_k\|_A$.

Zeigen Sie, dass dieses Verfahren eine Basis mit allen gewünschten Eigenschaften liefert.

Wir haben nun noch die Freiheit in der Wahl der Vektoren $\vec{r}_j$. Und genau hier liegt der Trick! Wir setzen:

$\vec{r}_1 := \vec{b}$ und für $k > 1$: $\vec{r}_k := A\vec{x}_k - \vec{b}$, wobei $\vec{x}_k$ die k -te Näherungslösung ist, d.h. $\vec{x}_k = \sum_{j=1}^k \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j$. (Diese Näherungslösung wird in jedem Schritt um einen Summanden ergänzt, ist also ohne großen zusätzlichen Aufwand stets berechnet.)

Zeigen Sie:

- Ist $\vec{x}_k$ nicht schon die gesuchte Lösung (in diesem Fall wären wir schon am Ziel), dann ist $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k$ linear unabhängig. (Zeigen Sie $\langle \vec{r}_k, \vec{r}_j \rangle = 0$ für $j < k$).

- Für $1 \leq j \leq k-2$ gilt $\vec{b}_j^T A \vec{r}_k = 0$.

- Was bringt das für den Algorithmus?

Ergänzender Hinweis: Das CG-Verfahren eignet sich auch hervorragend, um im Falle, dass n sehr groß ist, schnell eine sehr gute Näherungslösung zu finden.

- c) Für stetige Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 g^T(x) A f(x) dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}^n$ ist.

Benötigen wir, dass A positiv definit oder symmetrisch ist?

Darf A eventuell von x abhängen? Das heißt, würde $\langle f, g \rangle := \int_0^1 g^T(x) A(x) f(x) dx$ auch ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}^n$ definieren, wenn für jedes $x \in [0, 1]$ die Matrix $A(x)$ positiv definit wäre?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)

Die Funktionen f , g und h sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x & (-\pi < x \leq \pi), & & f(x+2\pi) &= f(x), \\ g(x) &= 1+x+|x| & (-2 < x \leq 2), & & g(x+4) &= g(x), \\ h(x) &= \cos(\tfrac{1}{2}x) & (-\pi < x \leq \pi), & & h(x+2\pi) &= h(x). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen.

Aufgabe 2 (T)

Betrachten Sie die Funktion $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine

a) Cosinusreihe

b) Sinusreihe

Hinweis: Sie müssen f jeweils unterschiedlich fortsetzen. Überlegen Sie sich dazu, ob die Summe von geraden bzw. ungeraden Funktionen (d.h. $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$) wieder gerade bzw. ungerade ist!

Aufgabe 3 (T)

Bestimmen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 2) die Werte der Reihen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots.$$

Hinweis: Finden Sie geeignete Werte von x .

Aufgabe 4 (Ü)

Bestimmen Sie eine 2π -periodische Lösung x der Differentialgleichung

$$-ie^{-it}\dot{x}(t) + x(t) = f(t)$$

mit $\int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = 0$, wobei gelte $f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kit}}{(2k)!}$. Verwenden Sie dazu für x einen Ansatz in Form einer trigonometrischen Reihe. Als Ergebnis begnügen wir uns mit einer Darstellung der Koeffizienten der Reihe durch einen Startwert und eine Rekursionsvorschrift.

Aufgabe 5 (Ü)

Sei V die Menge der beschränkten Funktionen $(-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$, die höchstens in endlich vielen Stellen unstetig sind.

- a) Zeigen Sie: V ist ein Vektorraum
- b) Zeigen Sie: Die zweistellige Funktion

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

erfüllt alle Eigenschaften eines Skalarproduktes auf V außer der Definitheit.

Außerdem gilt $\langle f, f \rangle = 0$ für $f \in V$ genau dann, wenn f höchstens an seinen Unstetigkeitsstellen einen Wert ungleich Null annimmt (insbesondere also an endlich vielen Stellen).

- c) Zusatzaufgabe für Matheinteressierte:
Wir hätten gerne, dass die oben definierte Funktion tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Dafür definieren wir für $f \in V$

$$[f] := \{g \in V : \langle f - g, f - g \rangle = 0\}.$$

Wir nennen $[f]$ die Klasse von f und jede Funktion $g \in [f]$ einen Vertreter dieser Klasse.

Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$ gilt:

$$g \in [f] \iff f \in [g].$$

Zeigen Sie, dass $\hat{V} := \{[f] : f \in V\}$ ein Vektorraum ist und durch

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ein Skalarprodukt auf $\hat{V}$ definiert wird.

Hinweis: Sie müssen hierfür zuerst zeigen, dass dieses Skalarprodukt wohldefiniert ist, d.h. für jedes Paar $[f], [g]$ liefert diese Definition genau eine komplexe Zahl.

(Gedanken dazu: Warum muss man dies hier zeigen, d.h. was könnte passieren? Als Beispiel für eine nicht wohldefinierte Funktion könnten Sie sich etwa diese Definition ansehen: $N : \hat{V} \rightarrow \mathbb{C}$, $N([f]) := f(0)$. Warum ist diese Definition nicht in Ordnung, also N nicht wohldefiniert?)

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

Die Funktionen f , g und h sind für $(x, y) \neq (0, 0)$ durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$. Zeigen Sie:

- a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- b) Die Funktion g ist in $(0, 0)$ unstetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d. h. für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos \phi, r \sin \phi) \rightarrow g(0, 0)$ für $r \rightarrow 0$.
- c) Die Funktion h ist in $(0, 0)$ unstetig, aber die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y).$$

Aufgabe 2 (Ü)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Für $0 \neq \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$f(\vec{x}) := \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\|\vec{x}\|^{\alpha n}}.$$

- a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ kann f stetig im Nullpunkt fortgesetzt werden?
- b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ kann f so fortgesetzt werden, dass alle partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt existieren?
- c) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ kann f so fortgesetzt werden, dass alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren?
- d) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(\vec{0})$ so, dass alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren. Wir setzen $\text{Grad } f := \begin{pmatrix} D_1 f \\ \vdots \\ D_n f \end{pmatrix}$. Berechnen Sie für $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ die Werte $D_{\vec{v}} f(\vec{0})$ und $\vec{v} \cdot \text{Grad } f(\vec{0})$.

Aufgabe 3 (Ü)

Es sei $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie:

$$\left\| \int_a^b \vec{r}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{r}(t)\| dt.$$

Aufgabe 4 (T)

Skizzieren Sie die folgenden Kurven, und berechnen Sie deren Längen.

- a) $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$
- b) $f(x) = |x|, \quad -1 \leq x \leq 1$
- c) $z(\phi) = \phi e^{i\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi]$
- d) $(x, y) = (\sin^3(\frac{1}{3}t) \cos t, \sin^3(\frac{1}{3}t) \sin t), \quad 0 \leq t \leq 6\pi$

Bemerkung: Die erste der Kurven heißt Zykloide. Sie entsteht, wenn man einen Kreis auf einer Gerade rollt und dabei einen Punkt auf der Oberfläche betrachtet.

Aufgabe 5 (T)

Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{und} \quad x + z = 1$$

genügen. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Menge an, berechnen Sie die Darstellung bezüglich der Bogenlänge, und bestimmen Sie in jedem Kurvenpunkt den Tangentenvektor und einen Normalenvektor.

Aufgabe 6 (Ü)

Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

- a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente im Kurvenpunkt $\vec{x}(t_0)$ an.
- b) Berechnen Sie die Länge der Kurve, und bestimmen Sie die Darstellung bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 7 (T)

In $\mathbb{R}^2$ ist die Kurve γ gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \\ \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Punkte mit waagerechter und alle Punkte mit senkrechter Tangente. Zeigen Sie, dass γ einen Doppelpunkt besitzt, und skizzieren Sie die Kurve. Geben Sie eine parameterfreie Darstellung der Kurve an.

Ist $\vec{x}$ injektiv?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

- a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$ b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$
c) $f(x, y, z) = xe^y/z \quad (z \neq 0)$

Aufgabe 2 (Ü)

Berechnen Sie jeweils die Jakobimatrix.

- a) $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2z^3e^{xy^2z^3} \\ x^2e^y + \sin x \end{pmatrix}$ b) $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x + x \sinh y \\ y^4 + 3x^2 \sin y \\ 4y - x^3 \end{pmatrix}$
c) $f(x, y, z) = \arctan(xy) + e^z \cosh(x + y)$ d) $f(x, y, z) = x^y$

Aufgabe 3 (Ü)

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
b) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$ für alle Punkte (x, y) , in denen das möglich ist.
c) Berechnen Sie $D_1D_2f(0, 0)$ und $D_2D_1f(0, 0)$.
d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort die Ableitung.
e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Aufgabe 4 (T)

Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Überprüfen Sie, ob f stetig ist.

- b) Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f .
- c) Sind D_1f und D_2f in $(0, 0)$ stetig?
- d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(0, 0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_{\vec{v}}f(0, 0) = \text{grad } f(0, 0) \cdot \vec{v}$?
- e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort die Ableitung.

Aufgabe 5 (T)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien partiell differenzierbar. Rechnen Sie nach:

a)

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$$

b)

$$\nabla \times (f\vec{\phi}) = f(\nabla \times \vec{\phi}) + (\nabla f) \times \vec{\phi} \quad (\text{für } n = 3)$$

c)

$$\nabla \cdot (f\vec{\phi}) = f(\nabla \cdot \vec{\phi}) + (\nabla f) \cdot \vec{\phi}$$

d) Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von

$$\vec{g}(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3).$$

Aufgabe 6 (Ü)

Sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, so gilt

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g.$$

Aufgabe 7 (Ü)

Sei $\vec{f}(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$.

Was macht $\vec{f}$ geometrisch?

Berechnen Sie die Funktionaldeterminanten $\det J_{\vec{f}}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termin für die zweite Übungsklausur HM II Sommer 2008 :

Samstag, 05.7.2008, 09.00-11.00 Uhr

Für die **Physiker** werden vom Montag, 23.6. bis Dienstag, 1.7. Listen aushängen in denen Sie sich eintragen können, um sich für die erste Übungsklausur anzumelden.

Alle **E-Techniker** und **Geodäten** schreiben die zweite Übungsklausur im **HMO**. Eine Anmeldung hierfür ist **nicht** nötig.

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)

Es gelte $a > b > 0$. Die Menge $T \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$T := \{ \vec{r}(u, v) \mid u, v \in [0, 2\pi) \}, \quad \vec{r}(u, v) := \begin{pmatrix} (a + b \cos u) \cos v \\ (a + b \cos u) \sin v \\ b \sin u \end{pmatrix}.$$

Machen Sie sich eine Vorstellung davon, wie T aussieht. Bestimmen Sie dann die Punkte von T , in denen die Tangentialebene senkrecht zur xy -Ebene steht, und die Punkte, in denen sie senkrecht zur xz -Ebene steht.

Aufgabe 2 (T)

Die Funktion $h : D(h) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $D(h) \subseteq \mathbb{R}^2$) ist gegeben durch $h(x, y) := f(u(x, y), v(x, y))$, wobei

$$u(x, y) := e^{-x-y}, \quad v(x, y) := e^{xy}, \quad f(u, v) := \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}.$$

- Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D(h)$ von h an.
- Berechnen Sie die Ableitung von h unter Verwendung der Kettenregel.
- Berechnen Sie die Ableitung von h , indem Sie h explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 3 (T)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades um den angegebenen Entwicklungspunkt $P = (1, -1, 0)$.

$$f(x, y, z) = xe^z - y^2, \quad P$$

Aufgabe 4 (Ü)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades um den angegebenen Entwicklungspunkt $P = (1, 1)$.

$$f(x, y) = \arctan(xy), \quad P = (1, 1)$$

Aufgabe 5 (T)

Sei $B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 36 \}$. Und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 6x + 2.$$

Bestimmen Sie alle Extrema von f und geben Sie die Art der Extrema an.

Aufgabe 6 (Ü)

Sei $B = [-2, 2] \times [-\frac{11}{2}, 2]$. Und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^3 - x + 2xy + y^2.$$

Bestimmen Sie alle Extrema von f und geben Sie die Art der Extrema an.

Aufgabe 7 (Ü)

Betrachten Sie die Funktion $\vec{g} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh x \cos y \\ \sinh x \sin y \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$, so dass U durch die Funktion $\vec{g}$ bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.
- b) Beweisen Sie, dass die Funktion $\vec{g}$ in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber $\vec{g}$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 8 (Ü)

Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

- a) Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ zwei Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert.
- b) Berechnen Sie unter der Annahme, dass u und v in $(0, 0)$ differenzierbar sind, die partiellen Ableitungen nach x im Punkt $(0, 0)$, indem Sie die Gleichungen aus Teil a) nach x ableiten.

Termin für die zweite Übungsklausur HM II Sommer 2008 :

Samstag, 05.7.2008, 09.00-11.00 Uhr

Für die **Physiker** werden bis Dienstag, 1.7., Listen aushängen in denen Sie sich eintragen können, um sich für die erste Übungsklausur anzumelden.

Alle **E-Techniker** und **Geodäten** schreiben die zweite Übungsklausur im **HMO**. Eine Anmeldung hierfür ist **nicht** nötig.

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x, y, z) := (z^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bestimmen Sie Minimum und Maximum von f auf der Menge

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}.$$

Hinweis: Wenn Sie f auf dem Rand von B untersuchen, dann können Sie dies vereinfachen, indem Sie f dort anders darstellen.

Aufgabe 2 (Ü)

Die Funktion $f : (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x, y, z) := x + y + z$. Bestimmen Sie das Minimum von f unter der Nebenbedingung

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$

Zeigen Sie insbesondere, dass ein solches Minimum existiert.

Aufgabe 3 (T)

Bestimmen Sie die globalen Extrema von

$$f(x, y, z) := 5x + y - 3z$$

auf der Menge $B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$.

Aufgabe 4 (Ü)

Skizzieren Sie die folgenden Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt.

- a) $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x \}$
- b) $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y^2 < x < 4 - y^2 \}$
- c) $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0, xy < 1, (2 - x)(2 - y) > 0 \}$

Aufgabe 5 (T)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\iint_G (y + x^2) d(x, y), \quad G \text{ ist das Dreieck mit den Ecken } (0, 0), (1, 5), (5, 1)$

b) $\iint_G \cosh \frac{x}{y+1} d(x, y), \quad G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, y - x > -1, y^2 - x - 1 < 0 \}$

Aufgabe 6 (Ü)

Skizzieren Sie die Integrationsgebiete der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge, und berechnen Sie den Wert der Integrale.

a) $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y dx dy$

b) $\int_0^2 \int_{\max\{0, 4x-4\}}^{x^2} 2xy dy dx$

Aufgabe 7 (T)

Die Kurve γ sei durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeben. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} f ds \quad \text{für} \quad f(x, y, z) := 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Aufgabe 8 (T)

Berechnen Sie jeweils das Linienintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ für die durch die Parametrisierung $\vec{r}$ gegebene Kurve γ .

a) $\vec{v}(x, y) = (e^x, xy), \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\vec{v}(x, y, z) = (y, -z, x), \quad \vec{r}(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t), \quad 0 \leq t \leq \ln 2$

c) $\vec{v}(x, y) = (\sin x, x^2 + y^2), \quad \vec{r}(t) = \begin{cases} (t, 0), & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1), & 1 < t \leq 2 \end{cases}$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termine für die Vordiplomklausuren Herbst 2008 :

Vordiplomklausur zu HM I : Montag, 22.09.2008, 08.00-10.00 Uhr

Vordiplomklausur zu HM II : Montag, 22.09.2008, 11.00-13.00 Uhr

Vordiplomklausur zu HM III : Dienstag, 23.09.2008, 08.00-10.00 Uhr

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

Es sei $G := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4 \}$.

- a) Überprüfen Sie rechnerisch für $v_1(x, y) := x^2 + xy$ und $v_2(x, y) := x^2y - y^2$ den Gaußschen Satz. Rechnen Sie also nach:

$$\iint_G (D_1 v_2(x, y) - D_2 v_1(x, y)) d(x, y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (1)$$

- b) Zeigen Sie nun allgemein, dass Gleichung (1) für jede stetig differenzierbare Funktion $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt.
Tip: Teilen Sie G auf in zwei Mengen, auf die Sie den Gaußschen Satz jeweils anwenden können. Und rechnen Sie nach, dass die Integrale über den zusätzlich entstandenen Rand sich auheben.

Aufgabe 2 (T)

Berechnen Sie die Integrale unter Verwendung des Gaußschen Satzes.

- a) $\iint_G x d(x, y), \quad G := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0, x^{2/3} + y^{2/3} < 1 \}$
- b) $\iint_G (x^2 + y) d(x, y), \quad G := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$

Aufgabe 3 (Ü)

Es sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$; für $r > 0$ definieren wir $D_r := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \}$. Die Funktion $\vec{v} : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbar. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot \vec{N} ds.$$

(Hierbei bezeichnet $\vec{N}$ die äußere Einheitsnormale.)

Aufgabe 4 (Ü)

Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}(x, y, z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

- a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um Potentialfelder handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.
- b) Berechnen Sie die Linienintegrale

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei die Kurve γ durch $\vec{r}(t) := (1 - t, t, 0)$, mit $0 \leq t \leq 1$, gegeben ist.

Aufgabe 5 (T)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion. Überprüfen Sie, unter welchen Voraussetzungen an a, b, c und f die folgenden Funktionen auf $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ Potentialfelder sind, und berechnen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

$$\text{a) } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 + z + yf(xy) \\ 3x^2y - xf(xy) \\ x + z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (T)

In $\mathbb{R}^2$ wird durch die Ungleichung

$$(x^2 + y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2$$

eine Menge G definiert. Die Kurve γ sei der positiv orientierte Rand von G .

- a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von γ mittels Polarkoordinaten.
- b) Berechnen Sie den Inhalt von G . (*Hinweis*: Leibnizsche Sektorformel)

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termine für die Vordiplomklausuren Herbst 2008 :

Vordiplomklausur zu HM I : Montag, 22.09.2008, 08.00-10.00 Uhr

Vordiplomklausur zu HM II : Montag, 22.09.2008, 11.00-13.00 Uhr

Vordiplomklausur zu HM III : Dienstag, 23.09.2008, 08.00-10.00 Uhr

Hinweise zur Anmeldung:

!!!! ANMELDESCHLUSS IST DER 18.7. !!!!

Diplomstudenten melden sich durch Abgabe des Prüfungsscheins beim Sekretariat des Lehrstuhls (Mathematikgebäude, Zimmer 312) an.

Bachelorstudenten melden sich im Studienbüro an.