Aufgabe 3

a) Das Kreuzprodukt ist ein inneres Produkt in $\mathbb{R}^3$ (bzw. in $\mathbb{C}^3$). Das heißt es bildet zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ auf einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ ab. Die Abbildungsvorschrift steht auf dem Aufgabenblatt. Wie man leicht sieht gilt $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.
Zur Geometrie: Wie man im Teil **d)** nachrechnet, steht der resultierende Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht auf $\vec{x}$ und auf $\vec{y}$. Die Länge des Vektors $\vec{x} \times \vec{y}$ gleicht der zweidimensionalen Fläche des Vierecks $0, \vec{x}, \vec{x} + \vec{y}, \vec{y}$.

Das Skalarprodukt bildet zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ab durch $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
Zur Geometrie: Das Ergebnise ist gleich dem Produkt der Längen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mal dem Cosinus des Winkles $\angle(\vec{x}, \vec{y})$, d.h. etwa wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in die selbe Richtung zeigen ist der Cosiuns gleich 1, stehen sie senkrecht, so ist er 0, und ist ihr Winkel größer als $\pi/2$, dann ist er negativ.

Das Spatprodukt bildet drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ab. Wie man in Teil **d)** nachrechnet, ist es egal, ob man links oder rechts das Kreuzprodukt nimmt. Lediglich das vertauschen zweier vektoren verändert das Vorzeichen des Produktes, also gilt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = -(\vec{y} \times \vec{x}) \cdot \vec{z}$ (siehe Kreuzprodukt). Zur Geometrie: Das Spatprodukt gibt das dreidimensionalen Volumens des Spats (oder Parallelepipeds), der von den Vektoren aufgespannt wird.

Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl geht komponentenweise. Der Vektor wird um diesen Faktor gestreckt bzw. gestaucht.

b)

$$
\begin{aligned}
&\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) \\
=&\vec{x} \times \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} + \vec{y} \times \begin{pmatrix} z_2x_3 - z_3x_2 \\ z_3x_1 - z_1x_3 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \end{pmatrix} + \vec{z} \times \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2(z_1x_2 - z_2x_1) - y_3(z_3x_1 - z_1x_3) \\ y_3(z_2x_3 - z_3x_2) - y_1(z_1x_2 - z_2x_1) \\ y_1(z_3x_1 - z_1x_3) - y_2(z_2x_3 - z_3x_2) \end{pmatrix} \\
+&\begin{pmatrix} z_2(x_1y_2 - x_2y_1) - z_3(x_3y_1 - x_1y_3) \\ z_3(x_2y_3 - x_3y_2) - z_1(x_1y_2 - x_2y_1) \\ z_1(x_3y_1 - x_1y_3) - z_2(x_2y_3 - x_3y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
(\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)\vec{y} - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\vec{z} \\
&= \begin{pmatrix} y_1(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_2(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_3(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{pmatrix} \\
&= \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})(\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} - (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y}
\end{aligned}
$$

Die zweite Rechnung geht analog.

d) Zu zeigen ist, dass $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0$:

$$\langle \vec{x}\times\vec{y}, \vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Damit ist auch $\vec{y} \times \vec{x}$ senkrecht zu $\vec{y}$ und somit auch $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

e)

$$\begin{aligned}(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} &= \begin{pmatrix} z_2x_3 - z_3x_2 \\ z_3x_1 - z_1x_3 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= (z_2x_3 - z_3x_2)z_1 + (z_3x_1 - z_1x_3)z_2 + (z_1x_2 - z_2x_1)z_3 \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Wir benützen das Verfahren nach Gram-Schmidt. Der erste Vektor u_1 ist ein Vielfaches (auf Norm 1 gestreckt bzw. gestaucht) des ersten gegebenen Vektors. Jeder weitere Vektor ist Orthogonal zu allen schon dagewesenen.
Wir berechnen im Folgenden erst Vektoren v_j, die in die richtige Richtung gehen. Nach Normierung erhalten wir die gesuchten Vektoren u_j der ONB.

a)

$$\vec{v}_1 := \vec{y}_1,\ \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2}\vec{y}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Den zweiten Vektor setzen wir $\vec{v}_2 := \vec{y}_2 - a\vec{u}_1$ mit $a = \langle \vec{y}_2, \vec{u}_1 \rangle = \frac{1}{2}(5 - 1 + 1 - 1) = 2$. Also

$$\vec{v}_2 := \vec{y}_1 - 2\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den dritten Vektor setzen wir $\vec{v}_3 := \vec{y}_3 - b\vec{u}_1 - c\vec{u}_2$ mit $b = \langle \vec{y}_3, \vec{u}_1 \rangle = \frac{1}{2}(-3+3+1+3) = 2$ und $c = \langle \vec{y}_3, \vec{u}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-6-3+0-3) = -2\sqrt{6}$. Also

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit liegt $\vec{y}_3$ schon in $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, weshalb $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) = \mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. Folglich ist $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ schon die gesuchte ONB.

b) Für die gegebenen Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ergibt sich

$$\vec{v}_1 := \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$\vec{v}_2 := \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|\vec{v}_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von $\vec{v}_3$ brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6,$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$\vec{v}_3 := \vec{x}_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 := \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.) a) In Teil b) zeigen wir, daß $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t) g(t)\, dt = \int_a^b f(t) g(t) \cdot \underbrace{1}_{w(t)}\, dt$

ein SP definiert auf $C([a,b], \mathbb{R})$.

Damit gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\langle f, g\rangle \leq \|f\| \cdot \|g\|, \text{ also auch}$$

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 = \langle f, g\rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2 = \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle$$

$$= \int_a^b f^2\, dt \int_a^b g^2\, dt.$$

b.) z.z. • $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ (klar, da $f(t) g(t) = g(t) f(t)$)

(Kommutativität) ✓

• $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ (Additivität im 1 Argument)

$$\int (f_1(t) + f_2(t))\, g(t)\, w(t)\, dt = \int f_1 g w\, dt + \int f_2 g w\, dt$$

$$= \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle \checkmark$$

• $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle$ (klar, da $\int \lambda f(t) g(t)\, dt = \lambda \int f(t) g(t)\, dt$

(Homogenität im ersten Argument

• Definitheit: $\begin{cases} \langle f, f\rangle \geq 0 & \checkmark \text{ da } \int_a^b f^2(t)\, dt \geq 0 \\ \langle f, f\rangle = 0 \to f = 0 \end{cases}$

$$0 = \langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(t)\, w(t)\, dt \xrightarrow[\text{stetig}]{f, w} f^2(t) \cdot w(t) = 0$$

auf $[a, b]$

$$\xrightarrow{w(t) > 0} f^2(t) = 0 \text{ auf } [a, b] \to f = 0.$$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist SP: • Kommutativität $f \cdot g = g \cdot f$ ✓

- Additivität: $\int (f_1+f_2) g\, e^{-t}\, dt = \int f_1 g e^{-t} + \int f_2 g e^{-t}$ ✓
- Homogenität: $\int \lambda f g\, e^{-t}\, dt = \lambda \int f g\, e^{-t}\, dt$ ✓
- Definitheit: wie bei 1 a) ✓
  (Integrand $f^2(t) e^{-t} \geq 0$, >0 irgendwo $\Rightarrow \int f^2 e^{-t}\, dt > 0$)

---

c.) $T_0 = \langle f, g_0 \rangle = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot 1\, dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

$$\underline{T_{n+1}} = \langle f, g_{n+1} \rangle = \int_0^\infty \underbrace{e^{-2t}}_{v'} \cdot \underbrace{t^{n+1}}_{u}\, dt = \Big[\underbrace{-\tfrac{1}{2} e^{-2t}}_{v} \cdot \underbrace{t^{n+1}}_{u}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{-\tfrac{1}{2} e^{-2t}}_{v} \underbrace{(n+1) t^n}_{u'}\, dt$$

$$= 0 - 0 + \frac{n+1}{2} \int_0^\infty e^{-2t} t^n\, dt = \underline{\frac{n+1}{2} T_n}$$

Beh: $T_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$ (IV)

Bew per VI. IA $(n=0)$: $T_0 = \frac{1}{2} = \frac{0!}{2^{0+1}}$ ✓

IS $(n \to n+1)$ $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} T_n$

$$\overset{IV}{=} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)+1}}$$ ✓

2a.) Zu zeigen: $\lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_0^M |e^{-t} f(t)\, g(t)|\, dt}_{=: W(M)}$ existiert

$$W(M) = \int_0^M e^{-t} |f(t)|\, |g(t)|\, dt$$

$$\underset{\text{Aufgabe 1}}{\overset{\text{siehe}}{=}} \langle |f(t)|, |g(t)| \rangle_{C[0,M],w} \qquad \text{mit } w(t) := e^{-t}$$

$$\leq \| |f| \|_{C[0,M],w} \cdot \| |g| \|_{C[0,M],w}$$

$$= \int_0^M f^2(t) e^{-t}\, dt \cdot \int_0^M g^2(t) e^{-t}\, dt$$

$$\leq \int_0^\infty f^2(t) e^{-t}\, dt \int_0^\infty g^2(t) e^{-t}\, dt =: K$$

Damit: $\left.\begin{array}{l} W(M) \leq K \text{ für alle } M \in [0,\infty), \\ W(M) \text{ wächst monoton} \end{array}\right\} \to W$ konv. für $M \to \infty$.

b.) Für $f, g \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ ist zz: $rf,\ f+g \in V$:

$\int_0^\infty f(t)\, e^{-t}\, dt$ konv. $\to \int_0^\infty rf(t)\, e^{-t}\, dt$ konv.

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\infty f^2(t) e^{-t}\, dt \text{ konv.} \\ \int_0^\infty g^2(t) e^{-t}\, dt \text{ konv} \\ \overset{a)}{\to} \int_0^\infty 2f(t) g(t) e^{-t}\, dt \text{ konv.} \end{array}\right\} \to \int_0^\infty \underbrace{(f(t)+g(t))^2}_{= f^2 + 2fg + g^2} e^{-t}\, dt \text{ konv.}$$

Damit gilt $rf,\ f+g \in V$.

c)(i) $\|f\|_w = \langle f,f\rangle_w^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(t)\, w(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \Big(\int_1^2 \underset{u'}{\underline{t}} \cdot \underset{v}{\underline{\ln t}}\; dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\big[\underset{u}{\underline{\tfrac{1}{2}t^2}}\, \underset{v}{\underline{\ln t}}\big]_1^2 - \int_1^2 \underset{u}{\underline{\tfrac{1}{2}t^2}} \cdot \underset{v}{\underline{\tfrac{1}{t}}}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(2\ln 2 - 0 - \int_1^2 \frac{t}{2}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(2\ln 2 - \Big[\frac{t^2}{4}\Big]_1^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\ln 2 - \frac{3}{4}}$$

(ii) $0 \overset{!}{=} \langle p,k\rangle_w \overset{a=1}{=} \int_1^2 (t+b)\cdot 1 \cdot \ln t\, dt$

$$\int_1^2 t\, \ln t\, dt + b\int_1^2 \ln t\, dt \underset{NR}{\overset{(i)}{=}} 2\ln 2 - \frac{3}{4} + b(2\ln 2 - 1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} NR:\ \int_1^2 \underset{u}{\underline{\ln}}\, t\, \underset{v'}{\underline{1}}\, dt &= \big[\underset{u}{\underline{\ln t}} \cdot \underset{v}{\underline{t}}\big]_1^2 - \int_1^2 \underset{u'}{\underline{\tfrac{1}{t}}} \cdot \underset{v}{\underline{t}}\, dt \\ &= 2\ln 2 - 0 - \int_1^2 1\, dt = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}}$$

$$\to b = \frac{2\ln 2 - \frac{3}{4}}{1 - 2\ln 2}$$

Aufgabe 2 **a)** Die Aussage ist richtig: Da die Gleichung für alle $y \in V$ gilt, also insbesondere für $y = x$, haben wir $\langle x, x\rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies aber nur für $x = 0$ der Fall sein.

b) Die Aussage ist falsch: Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$. Dort sind $\vec{x} := \vec{e}_1$ und $\vec{y} := \vec{e}_2$ linear unabhängig, und genauso $\vec{x}$ und $\vec{z} := \vec{e}_2$. Die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sind jedoch nicht linear unabhängig, denn $\vec{y} - \vec{z} = \vec{0}$.

c) Die Aussage ist wahr: Wäre nämlich $L(x_1, \ldots, x_n) = V$, so hätten wir $\langle y, x\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Aus **a)** folgte dann unmittelbar $y = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Die Aussage ist falsch: Man betrachte $V := \mathbb{C}^1$ mit $x := 0$, $y := 0$ und $z := i$.

e) Die Aussage ist wahr: Ist f nicht injektiv, so gibt es $x_1, x_2 \in V$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Für $x := x_1 - x_2$ bedeutet dies aber $x \neq 0$, und wegen der Linearität von f ist $f(x) = f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$.

f) Die Aussage ist falsch: Als Gegenbeispiel betrachten wir $V := \mathbb{C}^1$, die durch $f(x) := x$ gegebene lineare Abbildung und $y := 1$. Dann ist die Abbildung g nicht linear, denn es gilt $g(-y) = \|f(-1)\| = \|-1\| = 1 \neq -1 = -\|1\| = -\|f(y)\| = -g(y)$.

Aufgabe 3 **a)** Diese Abbildung ist linear, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 7(\lambda y_1 + y_2) \\ i(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) \\ 3(\lambda x_1 + x_2) - 4i(\lambda y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 7y_1 \\ ix_1 + y_1 \\ 3x_1 - 4iy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7y_2 \\ ix_2 + y_2 \\ 3x_2 - 4iy_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) . \end{aligned}$$

b) Diese Abbildung ist nicht linear, denn $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$. Bei linearen Abbildungen muss jedoch stets $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ gelten.

c) Auch dieses f ist nicht linear, da wieder $f(\vec{0}) \neq 0$ gilt. Man beachte aber: Auch

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := xy$$

wäre nicht linear (trotz $g(\vec{0}) = 0$), denn es gilt $g(\vec{e_1} + \vec{e}_2) = 1 \neq 0 + 0 = g(\vec{e}_1) + g(\vec{e}_2)$.

d) Entgegen dem ersten Anschein ist f linear, denn

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (x - 2i)(y + 3) - (x + 1)(y - 6i) \\ &= xy + 3x - 2iy - 6i - (xy - 6ix + y - 6i) = (3 + 6i)x - (1 + 2i)y . \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Die Summe $A+C$ ist nicht definiert, denn die Spaltenanzahl der beiden Summanden stimmt nicht überein. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 2i & 2\\ 1 & 0 & 3-i\\ 2+i & 7 & -3\end{pmatrix} \qquad 3C=\begin{pmatrix}3i & 0\\ 3 & -3i\\ 6 & 6\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 3i & -1\\ 0 & 1 & 1-i\\ 2+i & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3i & -3-5i & 6+6i\\ 1 & 2-3i & 2\\ 6+i & -12-2i & 14+3i\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -i & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3i & -1\\ 0 & 1 & 1-i\\ 2+i & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+3i & 12+2i & -11-i\\ 6+2i & 7+3i & -8+i\\ 0 & 3 & 3-3i\end{pmatrix}$$

$$(A+B)C=\begin{pmatrix}3 & 2i & 2\\ 1 & 0 & 3-i\\ 2+i & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\ 1 & -i\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+5i & 6\\ 6-i & 6-2i\\ 2i & -6-7i\end{pmatrix}$$

$$A^*C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2-i\\ -3i & 1 & 4\\ -1 & 1+i & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\ 1 & -i\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4-2i\\ 12 & 8-i\\ -5 & -5-i\end{pmatrix}$$

$$C^TB=\begin{pmatrix}i & 1 & 2\\ 0 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i & 6 & 2+3i\\ -i & 6+i & -2i\end{pmatrix}$$

1.) $u_0 = y_0 = 1$

$\|1\| = \left(\int_{-1}^{1} 1^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, also $v_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow$ ONB von U_0 ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$y_1(x) = x \qquad v_1 = y_1 - \langle y_1, u_0\rangle u_0$

$= y_1 - \int_{-1}^{1} \underbrace{x \cdot 1}_{\text{ungerade Fkt}} dx \cdot u_0 = y_1 - 0 \cdot u_0 = y_1$

$\|v_1\| = \left(\int_{-1}^{1} x^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$u_1(x) = \frac{v_1(x)}{\|v_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

$\rightarrow$ ONB von U_1 ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x\right\}$

$y_2(x) = x^2, \qquad v_2 = y_2 - \langle y_2, u_0\rangle u_0 - \langle y_2, u_1\rangle u_1$

$= y_2 - \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx \cdot u_0 - \int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}}\, x^3}_{\text{ungerade Fkt}} dx \; u_1$

$= y_2 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \cdot u_1$, also $v_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

$\|v_2\| = \left(\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(2 \cdot \frac{9-5}{45}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{45}} \rightarrow u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

$\rightarrow$ ONB v. U_2 ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$

(Hinweis: Legendrepolynome heißen eigentlich die Polynome $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, \ldots$, welche ein ONS bilden.

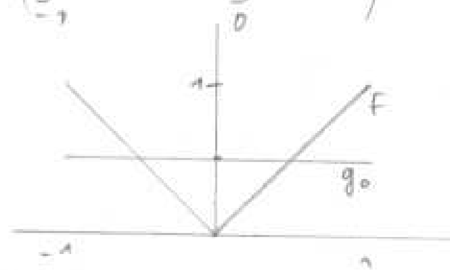
1.) Annäherung der Funktion f mit $f(x) = |x|$:
(Fortsetzung)

$$\sum_{n=0}^{m} \langle f, u_n \rangle u_n =: g_m \quad \text{ist die Näherungs Fkt..}$$

$m=0$: $$\langle f, u_0 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{0} -x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$ Skizze:



$m=1$: $$g_1 = g_0 + \langle f, u_1 \rangle u_1$$

$$\langle f, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{|x| \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x}_{\text{ungerade Fkt.}} \, dx = 0.$$

$$\rightarrow g_1 = g_0$$

$m=2$: $$g_2 = g_1 + \langle f, u_2 \rangle u_2$$

$$\langle f, u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{|x| \sqrt{\tfrac{45}{8}} \left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)}_{\text{gerade Fkt.}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{1} x^3 - \frac{1}{3} x \, dx$$

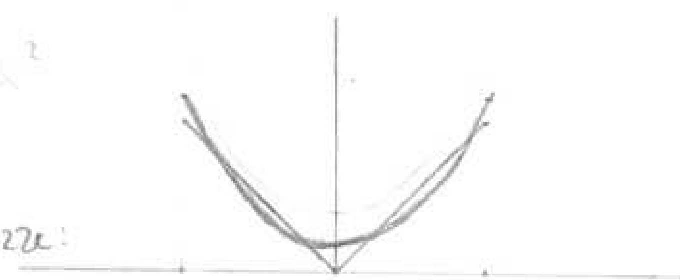
$$= 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^2 \right]_0^1 = 3 \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$$

$$= 3 \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3-2}{12} \right) = \frac{3}{12} \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{15}{16} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{16} + \frac{15}{16} x^2$$ Skizze:



5) a) Seien $f \in \mathcal{L}(U,V)$, $g \in \mathcal{L}(V,W)$, $u_1, u_2 \in U$ und $z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$g \circ f(u_1 + z u_2) = g(f(u_1 + z u_2)) \overset{f \text{ lin.}}{=\!=} g(f(u_1) + z f(u_2))$$

$$\overset{g \text{ lin}}{=\!=} g(f(u_1)) + z\, g(f(u_2)) = g \circ f\,(u_1) + z\, g \circ f(u_2) \quad ✓$$

b) Sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von U.

Wir definieren $f: U \to \mathbb{C}^n$ durch

$$f(z_1 u_1 + z_2 u_2 + \dots + z_n u_n) := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

f ist linear ✓ f ist surj ✓ f ist wohldefiniert, da die Darstellung bzgl. einer Basis eindeutig ist. ✓

f ist injektiv, denn $f(v) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = f(w)$

bedeutet $v = z_1 u_1 + \dots + z_n u_n = w$.

Insgesamt folgt: f ist ein Isomorphismus, damit ist U isomorph zu $\mathbb{C}^n$

c)

aus der Vorlesung bekannt

$\operatorname{Bild} P_{\vec{x}} = \operatorname{Lin}(\vec{x})$ ($\vec{y}\cdot\vec{x}$ kann jeden Wert annehmen, „$\subseteq$" ✓)

$$\operatorname{Kern} P_{\vec{x}} = \{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : (\vec{y}\cdot\vec{x})\vec{x} = 0\} = \begin{cases} \mathbb{C}^n & \text{Falls } \vec{x} = 0 \\ \{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : \vec{y} \perp \vec{x}\} & \vec{x} \neq 0 \text{ (n-1 dim Untervektorraum)} \end{cases}$$

$$\operatorname{Bild} K_{\vec{z}} = \{\vec{z} \times \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{C}^3\} = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } \vec{z} = 0 \\ \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : \vec{x} \perp \vec{z}\} & \text{falls } \vec{z} \neq 0 \end{cases}$$

„$\subseteq$" ist klar: $\vec{x} \in \operatorname{Bild} K_{\vec{z}} \to \vec{x} = \vec{z} \times \vec{y} \perp \vec{z}$

„$\supseteq$": $\operatorname{Bild} K_{\vec{z}}$ hat Dimension 2 für $\vec{z} \neq 0$

Sei etwa $z_1 \neq 0 \to \left\{ \vec{z} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist l.u.

$$\left(\begin{pmatrix} a \neq 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

5)
Fortsetzung

$\operatorname{Kern} K_{\vec{z}} = \begin{cases} \mathbb{C}^3 & \text{falls } \vec{z} = 0 \\ \operatorname{Lin}(\vec{z}) & \text{sonst}, \end{cases}$

(denn $\|\vec{z} \times \vec{y}\| = \|\vec{z}\| \, \|\vec{y}\| \cdot \sin \measuredangle(\vec{z}, \vec{y})$)

Bew: Bild hat dimension 2, also hat der Kern Dimension 1 und für $\vec{y} = \lambda \vec{z}$ gilt $\vec{z} \times \vec{y} = \lambda (\vec{z} \times \vec{z}) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Bild $D = C((0,1))$, denn für $f \in C((0,1))$ gibt es eine SF $F \in C^1((0,1)) \rightarrow DF = f \in \operatorname{Bild}(D)$.

Kern $D = \{F : \exists z \in \mathbb{C} \cdot f(x) = z$ für alle $x \in (0,1)\}$ ✓

Bild $I = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$

Bew: „$\supseteq$" $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = 0$
$\rightarrow f' \in C([0,1])$,

$If'(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x)$

$\rightarrow f = If' \in \operatorname{Bild} I$

„$\subseteq$" Sei $f \in C([0,1]) \rightarrow If \in C^1([0,1])$,
$If(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. ✓

Aufgabe 1 **a)** Multipliziert man die linke Seite aus, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & g & e & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Damit muss gelten $a = b = e = g = 0$, $c = f = 2$ und $d = h = 9$.

Mit einer Multiplikation von links mit einer Matrix kann man Zeilen vertauschen, mit einer Multiplikation von rechts Spalten.

b) Multipliziert man die linke Seite aus, so erhält man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & c & 2a+b+d & b \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge der zweiten Zeile des Produkts hängen nur von der gegebenen zweiten Zeile und der Matrix ab, mit welcher von rechts multipliziert wird. Stünde rechts in der zweiten Zeile irgend ein anderer Eintrag, so wäre das Problem nicht lösbar.
Für die Gleichheit der ersten Zeile muss gelten: $a = 1$, $c = 9$, $b = 4$ und $8 = 2a+b+d = 2+4+d$, also $d = 2$.

c) Seien $L = (l_{ij})$ und $R = (r_{ij})$, so gilt

$$LA = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11} + 2l_{12} \\ 0 & l_{21} + 2l_{22} \end{pmatrix} RA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

Dass $LA = 0$ gilt, können wir l_{12} und l_{22} beliebig wählen, etwa $l_{12} = s$ und $l_{22} = t$, damit muss nun gelten $l_{11} = -2s$ und $l_{21} = -2t$.
Dass $AR = 0$ gilt, muss genau gelten, dass $r_{12} = r_{22} = 0$ ist. r_{11} und r_{12} können beliebig gewählt werden.
Wir können die Menge aller gesuchter Matrizen L und R darstellen als

$$L = s \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

für beliebige $s, t, u, v \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 Es bezeichne A die in der Gleichung vorkommende Matrix. Wir können $AX = X + E_3$ umformen zu $AX - X = E_3$, also $(A - E_3)X = E_3$. Gesucht sind x_{jk} mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 3-i & 1 \\ 0 & -1 & -2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man die erste Spalte des links stehenden Produkts und vergleicht sie mit der ersten Spalte der rechts stehenden Matrix, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_{11} + (3-i)x_{21} + x_{31} &= 1 \\ -x_{21} - 2ix_{31} &= 0 \\ -x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Wir gehen die Gleichungen von unten nach oben durch und lesen ab: $x_{31} = 0$, $x_{21} = 0$ und $x_{11} = -1$. Die Gleichungssysteme, die man durch Vergleich der zweiten bzw. dritten Spalte bekommt, lauten

$$\begin{aligned} -x_{12} + (3-i)x_{22} + x_{32} &= 0 \\ -x_{22} - 2ix_{32} &= 1 \\ -x_{32} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -x_{13} + (3-i)x_{23} + x_{33} &= 0 \\ -x_{23} - 2ix_{33} &= 0 \\ -x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Hier ergibt sich: $x_{32} = 0$, $x_{22} = -1$ und $x_{12} = (3-i)x_{22} = -3+i$. Und schließlich: $x_{33} = -1$, $x_{23} = -2ix_{33} = 2i$ und $x_{13} = (3-i)x_{23} + x_{33} = (3-i)2i - 1 = 1 + 6i$. Die gesuchte Matrix ist also

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & 1+6i \\ 0 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Wir bringen die erweiterte Matrix $(A, \vec{y}\,)$ auf Zeilennormalform.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha^2 & 2-\alpha \end{pmatrix} =: (*)$$

1\. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta - \alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-\alpha^2)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Man sieht: In diesem Falle ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar; die Lösung ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2\. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - Z_3]{Z_1 \to Z_1 - 2Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist also größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem in diesem Fall keine Lösung.

3\. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystem erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt:

$$\vec{x}_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist folglich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Aufgabe 4 Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{(m,m)}$ werden wir jeweils definieren, indem wir ihre Zeilen, die wir mit $\vec{x}_1^T, \ldots, \vec{x}_m^T$ bezeichnen, angeben.

Im folgenden brauchen wir ständig: Für jede Matrix $D \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ ist $\vec{e}_j^{\,T} D$ die j-te Zeile von D, wenn $\vec{e}_j$ der j-te Einheitsvektor von $\mathbb{C}^m$ ist.

Z1: Multiplizieren von Zeile j mit $\alpha \neq 0$. Es soll also gelten: $\vec{e}_j^{\,T} BA = \alpha(\vec{e}_j^{\,T} A)$ und $\vec{e}_k^{\,T} BA = \vec{e}_k^{\,T} A$ für $k \neq j$, d. h. $\vec{x}_j^T A = \alpha(\vec{e}_j^{\,T} A)$ und $\vec{x}_k^T A = \vec{e}_k^{\,T} A$ für $k \neq j$. Dies ist offenbar für $\vec{x}_j^T = \alpha \vec{e}_j^{\,T}$ und $\vec{x}_k^T = \vec{e}_k^{\,T}$ $(k \neq j)$ erfüllt.

Z2: Addieren des α-fachen von Zeile k zu Zeile j, wobei $k \neq j$. Hier soll $\vec{x}_j^T A = \vec{e}_j^{\,T} BA = \vec{e}_j^{\,T} A + \alpha(\vec{e}_k^{\,T} A)$ und $\vec{x}_s^T A = \vec{e}_s^{\,T} BA = \vec{e}_s^{\,T} A$ für $s \neq j$ gelten. Dies erreichen wir mit $\vec{x}_j^T = \vec{e}_j^{\,T} + \alpha \vec{e}_k^{\,T}$ und $\vec{x}_s^T = \vec{e}_s^{\,T}$ für $s \neq j$.

Z3: Vertauschen von Zeile j und k. Dabei soll $\vec{x}_j^T A = \vec{e}_j^{\,T} BA = \vec{e}_k^{\,T} A$ und $\vec{x}_k^T A = \vec{e}_k^{\,T} BA = \vec{e}_j^{\,T} A$ sowie $\vec{x}_s^T A = \vec{e}_s^{\,T} BA = \vec{e}_s^{\,T} A$ für $s \neq j, k$ gelten. Daher wählen wir $\vec{x}_j^T = \vec{e}_k^{\,T}$ und $\vec{x}_k^T = \vec{e}_j^{\,T}$ sowie $\vec{x}_s^T = \vec{e}_s^{\,T}$ für $s \neq j, k$.

Aufgabe 5 Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.

Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Falle steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Falle Rang 3.

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_1 \to (\beta-4)^{-1} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Falle hat B Rang 4.

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 + 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Falle Rang 4.

Aufgabe 6 **a)** Um eine entsprechende Abbildungsmatrix zu erhalten müssen wir uns zuerst Basen des R^3 wählen. Wir wählen uns zuerst auf beiden Seiten die Standardbasis (e_1, e_2, e_3). Wir berechnen nun $P_{\vec{a}}(e_j)$ (die Bilder der Basisvektoren links) (für $j \in \{1, 2, 3\}$) und müssen diese als linearkombination von e_1, e_2 und e_3 (die Basisvektoren rechts) darstellen.

$$P_{\vec{a}}(e_j) = (e_j \cdot \vec{a})\vec{a} = a_j \vec{a} = (a_j a_1)e_1 + (a_j a_2)e_2 + (a_j a_3)e_3.$$

Damit ist die j-te Spalte von $[P_{\vec{a}}]$ gleich $\begin{pmatrix} a_j a_1 \\ a_j a_2 \\ a_j a_3 \end{pmatrix}$. Damit können wir zusammenfassen: $[P_{\vec{a}}] = (a_j a_k)_{j,k=1,2,3}$.

Wir können auch eine alternative Basis wählen. Dazu sei $\vec{a}$ unser erstes Basiselement. Seien nun $\vec{x}$ und $\vec{y}$ so, dass $(\vec{a}, \vec{x}, \vec{y})$ eine Orthonormalbasis ist. Diese Basis wählen wir nun erneut links und rechts. Damit gilt $P_{\vec{a}}\vec{a} = \vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{x} + 0\vec{y}$, $P_{\vec{a}}\vec{x} = P_{\vec{a}}\vec{y} = 0 = 0\vec{a} + 0\vec{x} + 0\vec{y}$. Bezüglich dieser Basis hat $[P_{\vec{a}}]$ links oben eine 1 und sonst nur Nullen als Einträge.

b) Wir wählen uns auf beiden Seiten die Standardbasis (e_1, e_2, e_3). Wir berechnen nun $K_{\vec{x}}(e_j)$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ und müssen diese als Linearkombination von e_1, e_2 und e_3 darstellen. Es gilt
$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$
$e_1 \times e_3 = -e_2, \; e_2 \times e_1 = -e_3, \; e_3 \times e_2 = -e_1$ und $e_j \times e_j = 0$, und damit

$$\begin{array}{lllrlrlrl}
K_{\vec{x}}(e_1) = & e_1 \times x = e_1 \times (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) & = & (0) & e_1 + & (-x_3) & e_2 + & (x_2) & e3, \\
K_{\vec{x}}(e_2) = & \dots & = & (x_3) & e_1 + & (0) & e_2 + & (-x_1) & e3, \\
K_{\vec{x}}(e_3) = & \dots & = & (-x_2) & e_1 + & (x_1) & e_2 + & (0) & e3.
\end{array}$$

Damit erhalten wir $[K_{\vec{x}}] = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Möglicherweise hat man einmal die Lust am herumrechnen verloren. Die gegebene Aufgabe kann man auch einfach so lösen: Man wählt die Basen besonders geeignet. Nehmen wir rechts etwa die Basis $(e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ und links die Basis $(2e_1 + 3e_2 + 5e_3, e_1, e_2 - e_3)$. (Es ist offensichtlich, dass es sich um Basen handelt, also die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind.) Damit bildet T den j-ten Basisvektor der linken Basis auf den j-ten Basisvektor der rechten Basis ab, weshalb, bezüglich dieser Basen die Abbildungsmatrix die Einheitsmatrix ist. Beachte: T ist nicht die Idenditätsabbildung!

Aufgabe 1 Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. (Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.)

$$\det(A) =_{[S_1 \to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \to Z_4 - Z_1]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2)\cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1 \to Z_1+Z_4]} \det\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1]} \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5$$

Aufgabe 2 **a)** Solche Zahlen λ heißen Eigenwerte.

Bestimmung der Eigenwerte: Im folgenden werden die Spalten mit Sn bezeichnet:

$$p = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{zu } S1:\ +S2+S3-S4}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 6-\lambda & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 4 & -\lambda & 1 \\ \lambda-6 & -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{zu } S3:\ -S1,\text{Entwickeln nach } S3}{=} -(6-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{zu } S2:\ -2S1,\text{Entwickeln nach } S2}{=} -(6-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda)(6-\lambda)$$

Die Eigenwerte sind -1, 1 und 6, denn genau dies sind die Nullstellen dieses Ploynoms (dieses heißt übrigens das Charakteristische Polynom von A).

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\det(A - \lambda I) = 0$. Damit hat die Matrix $\det(A - \lambda I) = 0$ nicht vollen Rang 4. Das bedeutet, dass es einen Vektor $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^4$ geben muss, so dass $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$. Für diesen Vektor gilt also $A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = 0$, und damit $A\vec{x} = \lambda I\vec{x}$.

Aufgabe 3 **a)** Wir verwenden die Kirchhoffschen Gesetze, um das Gleichungssystem aufzustellen: Die Knotenregel liefert die Gleichungen

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{und} \qquad I_2 = I_3 + I_4\,.$$

Die Maschenregel liefert zwei weitere Gleichungen, nämlich

$$R_3 I_3 = R_4 I_4 \qquad \text{und} \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_3\,.$$

(Die Maschenregel liefert auch noch $R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_4 I_4$, aber diese Information ist in den beiden anderen Gleichungen bereits enthalten.) Insgesamt ergibt sich mit den gegebenen Werten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 1 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ \alpha I_3 - \beta I_4 &= 0 \\ \alpha I_1 - \alpha I_2 - \alpha I_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun die zugehörige erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - \alpha Z_1]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 2\alpha Z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & -2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 3\beta & -\alpha \end{pmatrix} =: B$$

Fall 1: Für $\delta := 2\alpha + 3\beta \neq 0$ erhalten wir

$$\xrightarrow{Z_4 \to -Z_4/\delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \to Z_3 + \beta Z_4}]{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha\beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix} =: B_1$$

Fall 1.1: Ist zusätzlich $\alpha \neq 0$ so geht es weiter wie folgt:

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3/\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1-\alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-(\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist folglich eindeutig lösbar; man hat

$$I_1 = 1 - \frac{\alpha+\beta}{\delta} = \frac{\alpha+2\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_2 = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_3 = \frac{\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_4 = \frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}\,.$$

Fall 1.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sämtliche Lösungen dieses inhomogenen Systems erhalten wir, indem wir $I_3 = \lambda$ wählen. Dann ergibt sich $I_1 = 1-\lambda$, $I_2 = \lambda$ und $I_4 = 0$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})\,.$$

Fall 2: Gilt $2\alpha + 3\beta = 0$, also $\beta = -\frac{2}{3}\alpha$, so ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Fall 2.1: Für $\alpha \neq 0$ folgt wegen der letzten Zeile: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Fall 2.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können $I_3 = \lambda$ und $I_4 = \mu$ beliebig wählen; dann folgt $I_1 = 1-\lambda-\mu$ und $I_2 = \lambda+\mu$. Die allgemeine Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})\,.$$

Aus physikalischer Sicht sind nur Werte $\alpha, \beta > 0$ sinnvoll. Dann haben wir stets Fall 1.1 und damit eindeutige Lösbarkeit.

Aufgabe 6

a) Im Folgenden Sei mit Z_n die n-te Zeile gemeint.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} -x & b-x & \cdots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \cdots & c-x & -x \end{vmatrix} \overset{Z2-Z1, Z3-Z1, \ldots, Zn-Z1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & b-x & \cdots & \cdots & b-x \\ c & -b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & c-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c & c-b & \ldots & c-b & -b \end{vmatrix} \overset{\text{Entwickeln nach} Z1}{=}$$

$$= (-x) \begin{vmatrix} -b & & & \\ c-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c-b & \cdots & c-b & -b \end{vmatrix} - (b-x) \left|\cdots\right| \pm \cdots \pm (b-x) \left|\cdots\right|$$

$$=: a_0 + a_1 x,$$

ein Polynom in x mit Grad ≤ 1.

b) Mit $x = b$ ergibt sich $\det A_b = \begin{vmatrix} -b & & & \\ c-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c-b & \cdots & c-b & -b \end{vmatrix} = (-b)^n.$

Analog folgt $\det A_c = (-c)^n$.

Aus $p(x) = a_0 + a_1 x$ folgt $\begin{cases} a_0 + a_1 b = (-b)^n \\ a_0 + a_1 c = (-c)^n \end{cases}.$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{c(-b)^n - b(-c)^n}{c-b} = (-1)^n \frac{cb^n - bc^n}{c-b},$$

$$a_1 = \frac{(-b)^n - (-c)^n}{b-c} = (-1)^n \frac{b^n - c^n}{b-c}$$

c) In diesem Fall ist $a_0 = 0$ und $a_1 = -1$, also $p(x) = -x$.
Für $x \neq 0$ ist die Determinante von A_x ungleich Null und damit die Matrix A_x regulär. Somit gibt es genau eine Lösung $\vec{y}$ jeder Gleichung $A_x\vec{y} = \vec{z}$.
Für $x = 0$ ist die Determinanate von A_x gleich Null. Damit ist die Abbildung $\vec{y} \mapsto A_x\vec{y}$ weder surjektiv noch injektiv. Da sie nicht surjektiv ist, gibt es $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ für welche es keine Lösung von $A_x\vec{y} = \vec{z}$ gibt. Für jedes $\vec{z}$ im Bild dieser Abbildung ist die Lösung nicht eindeutig. Die gegebene Rechte Seite ist gleich der ersten Spalte von A_x, also gibt es etwa $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $A_x\vec{y} = \vec{z}$. Jedoch gibt es unendlich viele weitere solcher Lösungen.

4) $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ -j & i=j+1 \\ j-1 & i=j-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\det A_1 = \det(1) = 1$, $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, $\det A_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 6$

Mit Hilfe des Gauß-Alg. läßt sich A_n zu einer oberen Δ-Matrix mit gleicher Determinante vereinfachen:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & n \end{pmatrix} =: C_n$$

Hierbei wird im k-ten Schritt jeweils die k-te Zeile durch die Summe der (k-1)-ten und k-ten Zeile ersetzt $(k=1,\dots,n)$.

Es ergibt sich

$$\det A_n = \det C_n = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n = n!$$

5.) $b_1 = \det A_1(t) = \det(1+t^2) = \underline{1+t^2}$, $b_2 = \det(A_2(t)) = \det\begin{pmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix} = (1+t^2)^2 - t^2 = \underline{1+t^2+t^4}$.

Entwickeln wir nach der ersten Zeile, so erhalten wir für $\underline{n\geq 3}$:

$$b_n = \det A_n = (1+t^2)\det A_{n-1} - t\cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} t & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+t^2 & t & & \vdots \\ \vdots & t & & & \\ \vdots & 0 & & & 0 \\ & \vdots & & & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \;\; t & 1+t^2 \end{pmatrix}}_{n-1}$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (1+t^2)\det A_{n-1} - t^2 \det A_{n-2} = (1+t^2)\, b_{n-1} - t^2\, b_n .$$

Damit erhalten wir $b_3 = (1+t^2) b_2 - t^2 b_1 = (1+t^2)(1+t^2+t^4) - t^2(1+t^2) = \underline{1+t^2+t^4+t^6}$

Vermutung: $b_n = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$ (IV)

Bew mit VI: IA $b_1 = 1+t^2 = \sum_{k=0}^{1} t^{2k}$ ✓, $b_2 = 1+t^2+t^4 = \sum_{k=0}^{2} t^{2k}$ ✓

IS $(n-1 \rightsquigarrow n,\ n\geq 3)$: $b_n = \det A_n(t) = (1+t^2)\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} - t^2 \sum_{k=0}^{n-2} t^{2k}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k+2} - \sum_{k=0}^{n-2} t^{2k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} t^{2k} \quad \square$$

Also gilt $\det A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 1

- Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$?
  Nein (außer für $n=1$). Es gilt $\det(\lambda A) = (\lambda)^n \det(A)$.
- $\det I_n = n$?
  Nein (außer für $n=1$). Es gilt $\det I_n = 1$.
- $\det(AB) = \det A \det B$?
  Ja.
- $\det(A^{-1}) = \det A$?
  Nein (außer für $\det A = 1$). Wie man oben sieht gilt $\det(A^{-1})\det A = \det(A^{-1}A) = \det I_n = 1$, und damit $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\det(C^{-1}C^\top C^2 C^\top C^{-1}) = (\det C)^2$?
  Ja. Sogar jede reguläre Matrix erfüllt dies (nachrechnen!).
- $\det(A+B) = \det A + \det B$?
  Nein (außer für $n=1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$). Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 4\det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.
- $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
  Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl. Nun siehe erster Punkt.

Aufgabe 2 Wir bringen jeweils die um die Einheitsmatrix erweiterte Matrix mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform; daran sieht man dann, ob die Matrix regulär ist und kann gegebenenfalls auch die Inverse ablesen. Zunächst zur Matrix A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{\substack{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2 \\ Z_3 \to Z_3 - 2Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{3}{2}Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{2}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{2}{3}Z_3]{Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist folglich regulär, und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Man sieht: Die Matrix B ist nicht regulär. Jetzt noch zu C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to 5Z_3 - 3Z_2]{Z_1 \to -5Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\lambda - 10 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Nun kommt es auf λ an: Für $\lambda = 2$ ist die Matrix C nicht regulär; für $\lambda \neq 2$ ergibt sich

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3/(\lambda-2)]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_3/(\lambda-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 - 8/(\lambda-2) & 1 + 6/(\lambda-2) & -10/(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 5 & 4/(\lambda-2) & -3/(\lambda-2) & 5/(\lambda-2) \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix ist somit

$$C^{-1} = \frac{1}{5(\lambda - 2)} \begin{pmatrix} -3\lambda + 6 & \lambda - 2 & 0 \\ 2\lambda - 12 & \lambda + 4 & -10 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **a)** Für $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ gilt

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\,,$$

wenn a_1, a_2, a_3 die Komponenten von $\vec{a}$ sind, sowie

$$(\vec{x} \cdot \vec{a}\,)\vec{a} = \begin{pmatrix} (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3)a_1 \\ (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3)a_2 \\ (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3)a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \vec{x}\,.$$

Folglich ergibt sich

$$f(\vec{x}\,) = \left((\cos\phi)E_3 + (\sin\phi) \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos\phi) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \right) \vec{x}\,.$$

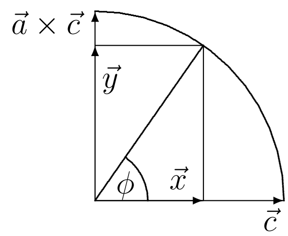
Es gilt also $f(\vec{x}\,) = A\vec{x}$ mit einer gewissen Matrix A. Diese Matrix ist die gesuchte Darstellungsmatrix, und die Linearität von f ist damit auch gezeigt.

b) Wegen $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 1$ gilt

$$f_\phi(\vec{a}\,) = (\cos\phi)\vec{a} + (\sin\phi)(\vec{a} \times \vec{a}\,) + (1 - \cos\phi)(\vec{a} \cdot \vec{a}\,)\vec{a} = (\cos\phi)\vec{a} + (1 - \cos\phi)\vec{a} = \vec{a}\,.$$

Für einen Vektor $\vec{c}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ ist, gilt $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$; also ergibt sich

$$f_\phi(\vec{c}\,) = (\cos\phi)\vec{c} + (\sin\phi)(\vec{a} \times \vec{c}\,)\,.$$



Um zu verstehen, was mit $\vec{c}$ passiert, betrachten wir die nebenstehende Skizze. Dabei ist zu beachten: Der Vektor $\vec{a}$ ist nicht eingezeichnet; er zeigt senkrecht aus der Zeichenebene heraus. Weiter gilt: Da $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht zueinander sind, der Winkel zwischen ihnen also $= \frac{\pi}{2}$ ist, gilt $\|\vec{a}\times\vec{c}\,\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{c}\,\|\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \|\vec{c}\,\|$. Für die eingezeichneten Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt $\vec{x} = (\cos\phi)\vec{c}$ und $\vec{y} = (\sin\phi)(\vec{a}\times\vec{c}\,)$. Somit ist $f_\phi(\vec{c}\,) = \vec{x} + \vec{y}$ der Vektor, den man erhält, wenn man $\vec{c}$ um den Winkel ϕ dreht, und zwar um die durch $\vec{a}$ gegebene Drehachse.

Einen beliebigen Vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ können wir stets schreiben als $\vec{z} = \lambda\vec{a} + \vec{c}$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektor $\vec{c}$. Dann ist $f_\phi(\vec{x}\,) = \lambda f_\phi(\vec{a}\,) + f_\phi(\vec{c}\,) = \lambda\vec{a} + f_\phi(\vec{c}\,)$. Die Abbildung f_ϕ stellt mithin eine Drehung um den Winkel ϕ um die Drehachse $\{\,\lambda\vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\,\}$ dar.

c) Offenbar gilt

$$f_\alpha\big(f_\beta(\vec{a}\,)\big) = f_\alpha(\vec{a}\,) = \vec{a} = f_{\alpha+\beta}(\vec{a}\,)\,.$$

Ist $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$, so haben wir

$$\begin{aligned} f_\alpha\big(f_\beta(\vec{c}\,)\big) &= f_\alpha\big((\cos\beta)\vec{c} + (\sin\beta)(\vec{a}\times\vec{c}\,)\big) = (\cos\beta)f_\alpha(\vec{c}\,) + (\sin\beta)f_\alpha(\vec{a}\times\vec{c}\,) \\ &= (\cos\beta)\big((\cos\alpha)\vec{c} + (\sin\alpha)(\vec{a}\times\vec{c}\,)\big) + (\sin\beta)\big((\cos\alpha)(\vec{a}\times\vec{c}\,) + (\sin\alpha)(-\vec{c}\,)\big) \\ &= (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)\vec{c} + (\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)(\vec{a}\times\vec{c}\,) \\ &= \big(\cos(\alpha+\beta)\big)\vec{c} + \big(\sin(\alpha+\beta)\big)(\vec{a}\times\vec{c}\,) = f_{\alpha+\beta}(\vec{c}\,)\,. \end{aligned}$$

(Hierbei wurde $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}\,) = -\vec{c}$ verwendet.)

Der Vektor $\vec{a}$ lässt sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Wie wir gerade gesehen haben, stimmen die Abbildungen $f_\alpha \circ f_\beta$ und $f_{\alpha+\beta}$ auf einer solchen Basis überein; damit ist $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ bewiesen.

Aufgabe 4 **a)** Die beiden Vektoren haben offenbar Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander. Das Vektorprodukt dieser Vektoren ist orthogonal zu beiden und hat zudem Norm 1 (denn $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\phi$, wobei ϕ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist). Wir wählen also

$$\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$$

als dritten Vektor.

b) Auch hier gilt: Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\langle \vec{x}, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle \vec{x}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \rangle = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-ix_1 - x_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $x_1 = 1$ und $x_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)x_3 = 0$, also $x_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor $\vec{x}$ müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

Aufgabe 5 **a)** Wir verwenden die Schreibweise $\pi_1 \xrightarrow{(i\,j)} \pi_2$ für $(i\ j) \circ \pi_1 = \pi_2$. (Dabei bezeichnet $(i\ j)$ die Transposition, die i und j vertauscht.) Dann haben wir

$$\pi \xrightarrow{(1\,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\,5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\,5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4\,5)} \mathrm{id}\,.$$

Das bedeutet $(4\ 5) \circ (3\ 5) \circ (2\ 5) \circ (1\ 3) \circ \pi = \mathrm{id}$, also $\pi = (1\ 3) \circ (2\ 5) \circ (3\ 5) \circ (4\ 5)$.

Nun müssen wir noch $f(\pi)$ bestimmen, d. h. wir müssen feststellen, wieviele Paare (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ es gibt. Wir erhalten

$$(1,3), \quad (1,4), \quad (2,3), \quad (2,4), \quad (2,5), \quad (3,4),$$

die Fehlstandszahl ist also 6. Dies ist eine gerade Zahl, also ist π gerade. (Dies sieht man auch daran, dass sich π als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt.)

b) Hier ergibt sich

$$\pi \xrightarrow{(1\,4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\,7)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3\,7)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5\,8)} \mathrm{id}\,.$$

Folglich hat π die Darstellung $\pi = (1\ 4) \circ (2\ 7) \circ (3\ 7) \circ (5\ 8)$.

Die Permutation hat folgende Fehlstände:

$$(1,3), (1,4), (1,7), (2,3), (2,4), (2,6), (2,7), (2,8), (3,4), (5,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8)$$

Dies bedeutet $f(\pi) = 14$, die Permutation ist also ebenfalls gerade.

Aufgabe 6 Es seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ die Spalten von A. Definitionsgemäß heißt $\operatorname{rang}(A) = r$ folgendes: Es gibt unter den Spaltenvektoren r linear unabhängige, und $r+1$ dieser Vektoren sind stets linear abhängig.

Zunächst betrachten wir $UA = [U\vec{a}_1, \ldots, U\vec{a}_n]$. Diese Matrix hat Rang r, denn es gilt die folgende Äquivalenz:

$$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \text{ sind linear unabhängig} \iff U\vec{x}_1, \ldots, U\vec{x}_k \text{ sind linear unabhängig}$$

(Denn: Aus $\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 U\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k U\vec{x}_k = U(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k) = \vec{0}$. Umgekehrt folgt aber aus $\lambda_1 U\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k U\vec{x}_k = \vec{0}$ auch $\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$, weil U regulär, die zugehörige lineare Abbildung also injektiv ist.)

Nun folgt die Behauptung, wenn man beachtet, dass mit V auch V^T regulär ist:

$$\operatorname{rang}(UAV) = \operatorname{rang}(AV) = \operatorname{rang}\big((AV)^T\big) = \operatorname{rang}(V^TA^T) = \operatorname{rang}(A^T) = \operatorname{rang}(A)$$

Bemerkung: Die Aussage gilt offenbar auch für $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $U \in \mathbb{C}^{(m,m)}$, $V \in \mathbb{C}^{(n,n)}$.

Aufgabe 7 Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

orthogonal, so haben insbesondere beide Spaltenvektoren die Norm 1. Es gilt folglich $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$; daher existiert ein Winkel $\phi_1 \in [0, 2\pi)$ mit $(\alpha, \gamma) = (\cos\phi_1, \sin\phi_1)$. Ebenso gilt $\beta^2 + \delta^2 = 1$, also existiert ein Winkel $\phi_2 \in [0, 2\pi)$ mit $(\delta, -\beta) = (\cos\phi_2, \sin\phi_2)$. Die Matrix hat somit die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Da A orthogonal ist, stehen die beiden Spalten senkrecht aufeinander, d. h. es gilt

$$0 = -\cos\phi_1 \sin\phi_2 + \sin\phi_1 \cos\phi_2 = \sin(\phi_1 - \phi_2).$$

Hieraus folgt $\phi_1 - \phi_2 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist

$$-\sin\phi_2 = -\sin(\phi_1 - k\pi) = -(-1)^k \sin\phi_1, \quad \cos(\phi_2) = \cos(\phi_1 - k\pi) = (-1)^k \cos\phi_1.$$

Mit $c := \cos\phi_1$ und $s := \sin\phi_1$ haben wir also die behauptete Darstellung.

Aufgabe 8 folgt auf der nächsten Seite (dort steht noch aus versehen Aufgabe 5)

5.) Es muss gelten $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

$C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in (1) eingesetzt, von links mit C^{-1} multipliziert ergibt

$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \underbrace{C^{-1} A C}_{=D}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. D soll diagonal sein. Wie in der Vorlesung rechnen wir: $C^{-1}AC = D \Leftrightarrow AC = CD$

Sei etwa $C = (\vec{c}_1\ \vec{c}_2)$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, so gilt:

$AC = (\vec{c}_1\ \vec{c}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = (\lambda_1 \vec{c}_1\ \ \lambda_2 \vec{c}_2)$, also $A\vec{c}_i = \lambda_i \vec{c}_i$,

bzw. $(A - \lambda_i E)\vec{c}_i = 0 \quad (i = 1,2)$.

Wir berechnen zuerst λ_1, λ_2: Für diese Werte ist $(A - \lambda_i)$ nicht regulär, also $0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(4-\lambda) - (-6)\cdot 1$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Wir wählen also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Bei geeigneter Wahl gilt dann $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Nun berechnen wir die $\vec{c}_i$: Es muß gelten $(A - \lambda_i E)\vec{c}_i = 0$

$$\left.\begin{array}{l} (A - 1E)\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\vec{c}_1, \text{ etwa } \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (A - 2E)\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\vec{c}_2, \text{ etwa } \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Damit } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot u = u \\ \dot v = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = a \cdot e^t \\ v(t) = b \cdot e^{2t} \end{cases}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \cdot e^x \\ b \cdot e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a e^t + b e^{2t} \\ 2a e^t + 3b e^{2t} \end{matrix}$

Die Lösungen x, y der ursprünglichen Gleichung lauten somit

$x(t) = a \cdot e^t + b e^{2t}$
$y(t) = 2a e^t + 3b e^{2t}$

Aufgabe 1 • Zunächst zur Matrix A. Eigenwerte von A sind die $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3$$

Die Matrix besitzt also nur einen Eigenwert $\lambda_1 = 18$; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum ist die Menge aller Lösungen von $(A - 18E)\vec{x} = \vec{0}$. Wir betrachten daher

$$(A - 18E) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alle Zeilen sind Vielfache voneinander, das Gleichungssystem reduziert sich also auf die eine Gleichung $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$. Diese hat die allgemeine Lösung $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_2 = 2s - 2t$. Es folgt

$$E(18) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Der Eigenraum ist zweidimensional, d. h. $\lambda_1 = 18$ hat die geometrische Vielfachheit 2.

• Jetzt zur Matrix B. Wir betrachten $(B - \lambda E)$:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte liefert

$$\det(B - \lambda E) = -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.$$

Die Matrix B hat somit drei Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun den Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$, also die Lösungsmenge von $(B - E)\vec{x} = \vec{0}$. Mit der Umformung $(*)$ wird $(B - E)$ zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $x_2 = 0$ und $x_1 + x_3 = 0$. Der Eigenraum ist also

$$E(1) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Wenn im folgenden $\pm$ oder $\mp$ auftritt, bezieht sich das obere Zeichen stets auf λ_2 und das untere auf λ_3. Aus $(*)$ gewinnen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp\sqrt{2}(1\mp\sqrt{2}\,) \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 2\mp 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp\sqrt{2}+2 \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 2\mp 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile ist das $(\mp\sqrt{2}\,)$-fache der ersten, sie fällt also weg. Wir können x_3 beliebig wählen und erhalten $x_2 = (\pm\sqrt{2}-2)x_3$ und $x_1 = \mp\sqrt{2}\,x_3$. Das bedeutet

$$E(\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad E(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 Wir berechnen die Determinante von $(A-\lambda E)$:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

mit $S_2 \to S_2 + S_4$ und Entwicklung nach Z_4 folgt

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

und $S_2 \to S_2 - S_3$ sowie Entwicklung nach Z_3 liefert

$$= (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda)-3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3$$

Also: Die Matrix besitzt die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen noch die Eigenräume:

Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A-0E)\vec{x} = \vec{0}$, also $A\vec{x} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4+Z_3]{Z_1\to Z_1+2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Wählen wir x_4 beliebig, so folgt aus der ersten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den Eigenraum

$$E(0) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad \vec{c}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alle Zeilen sind Vielfache voneinander; es bleibt also nur eine Gleichung übrig. Wir können x_2, x_3 und x_4 beliebig wählen und erhalten $x_1 = x_2 - x_3 + x_4$. Es folgt

$$E(4) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)\,, \qquad \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ sind linear unabhängig, also leistet $C := [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4]$ das Gewünschte

Aufgabe 3 a,b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(M - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ -3+\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

(Schritte: erste Zeile von der zweiten abgezogen, erste Spalte zur zweiten dazugezählt, entwickelt)
Die Eigenwerte sind $la_1 = 3$ mit einfacher algebraischer Vielfachheit und $la_2 = 2$ mit zweifacher algebraischer Vielfachheit.
Eigenarum zu $\lambda_1 = 3$:

$$0 = (M - 3E)\vec{v} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

also $v_1 = 0$, $2v_2 = v_3$, $E_3 = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. Eigenarum zu $\lambda_2 = 2$:

$$0 = (M - 2E)\vec{v} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

also $v_1 = v_3$, $v_1 = v_3$, $E_2 = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. Die Geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte ist 1. **c)** M besitzt mximal 2 lin. unabh. Vektoren, etwa (siehe oben bei E_3 und E_2): $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **d)** M ist nicht diagonalisierbar, sonst müßte M drei lin. unabh. Eigenvektoren haben.
M ist nicht diagonalisierbar, sonst müßte für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen sein.

Aufgabe 4 **a)** Wir zeigen zunächst folgendes: Für Matrizen $S = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und $T = \operatorname{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ gilt stets $ST = TS$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} ST &= S[\tau_1\vec{e}_1, \dots, \tau_n\vec{e}_n] = [\tau_1 S\vec{e}_1, \dots, \tau_n S\vec{e}_n] = [\tau_1\sigma_1\vec{e}_1, \dots, \tau_n\sigma_n\vec{e}_n] \\ &= [\sigma_1\tau_1\vec{e}_1, \dots, \sigma_n\tau_n\vec{e}_n] = [\sigma_1 T\vec{e}_1, \dots, \sigma_n T\vec{e}_n] = T[\sigma_1\vec{e}_1, \dots, \sigma_n\vec{e}_n] = TS\,. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis: Da A, B simultan diagonalisierbar sind, existiert eine reguläre Matrix C, so dass $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Wie wir eben gesehen haben, ist dann

$$(C^{-1}AC)(C^{-1}BC) = (C^{-1}BC)(C^{-1}AC)\,, \qquad \text{also} \qquad C^{-1}ABC = C^{-1}BAC\,.$$

Multiplikation mit C von links und mit C^{-1} von rechts liefert die Gleichung $AB = BA$.

b) Da alle Eigenwerte von A algebraische Vielfachheit 1 haben, besitzt die Matrix n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wählen wir dazu Eigenvektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$, so sind diese linear unabhängig, und für $C := [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n]$ hat $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt. Dann ist

$$AB\vec{c}_j \overset{\text{Vor.}}{=} BA\vec{c}_j = B\lambda_j\vec{c}_j = \lambda_j B\vec{c}_j \qquad (j = 1, \dots, n)\,,$$

d. h. $B\vec{c}_j$ liegt im Eigenraum von A zum Eigenwert λ_j, also in $L(\vec{c}_j)$. Es gilt somit $B\vec{c}_j = \mu_j\vec{c}_j$ für ein gewisses μ_j. Das bedeutet: $\vec{c}_j$ ist ein Eigenvektor von B. Folglich sind $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von B, und hieraus folgt, dass $C^{-1}BC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5 Gesucht: die Eigenwerte des Linksschifts L. Für einen Eigenwert λ muss gelten $L(a_n) = \lambda(a_n)$ für eine Folge $(0) \neq (a_n) \in l^2$. Wir können damit rechnen:

$$\begin{aligned} &(L-\lambda)(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - \lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \lambda a_n \\ &\leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n = k\lambda^n. \end{aligned}$$

Ist $k = 0$, so wäre $(a_n) = 0$, also können wir $k = 1$ setzen.
Da (a_n) in l^2 liegt, muss nun gelten $\sum a_n^2 = \sum \lambda^{2n} < \infty$, was genau für $|\lambda| < 1$ gilt. Damit sind genau alle $\lambda \in (-1, 1)$ Eigenwerte von L mit zugehörigen Eigenräumen $\operatorname{Lin}\big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Diese haben also algebraische Vielfachheit 1.

Nun sind Gesucht: die Eigenwerte des Rechtsschifts R. Für einen Eigenwert λ muss gelten $R(a_n) = \lambda(a_n)$ für eine Folge $(0) \neq (a_n) \in l^2$. Wir können damit rechnen:

$$(R-\lambda)(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n-1} - \lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n-1} = \lambda a_n.$$

Mit $a_0 := 0$. Erster Fall $\lambda \neq 0$: damit gilt $a_1 = \frac{1}{\lambda}a_0 = 0$ und entsprechend $0 = a_2 = a_3 = ...$, also $(a_n) = (0)$.
Zweiter Fall $\lambda = 0$. Damit haben wir im $n + 1$ten Eintrag: $a_n = 0$, also wiederum $(a_n) = (0)$.
R hat also keine Eigenwerte.

Aufgabe 6 Bei einer Spiegelung werden Vektoren, die auf der Spiegelebene liegen auf sich selbst abgebildet, außerdem wird ein Vektoren $\vec{u}$, der senkrecht zur Spiegelebene liegt, auf $-\vec{u}$ abgebildet. Derart Vektoren haben wir in jedem der Fälle genügend. Damit haben wir in jedem der drei Fälle genau die Eigenwerte 1 und -1 mit folgenden Eigenräumen:

Für R: $E(1) = \text{Lin}(\vec{v}, \vec{w})$, $E(-1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ (dieser Vektor steht senkrecht auf $\vec{v}$ und auf $\vec{w}$.)

Für S: $E(1) = \text{Lin}(\vec{x}, \vec{y})$, $E(-1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ (beide senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$.)

Für T: $E(1) = \text{Lin}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, $E(-1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ (senkrecht auf $\vec{x}$, $\vec{y}$ und auf $\vec{z}$.)

Aufgabe 7

a) $(S+T)(x) = S(x) + T(x) = \mu x + \lambda x = (\lambda + \mu)x$. $(5T)(x) = 5\lambda x$.

b) $T^2(x) = T(T(x)) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$. Allgemeiner mit VI:
$IV : T^n(x) = \lambda^n x$.
Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist gegeben. Wir haben sogar schon $n = 2$ gezeigt.
$IS\ (n \to n+1) : T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = T(\lambda^n x) = \lambda^n T(x) = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1} x$.
Damit gilt für $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$:

$$p(T)(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n x = p(\lambda)x.$$

c) Sei x ein Eigenvektor von T^2 zum Eigenwert ν^2. Dann gilt
$(T - \nu E)((T + \nu E)(x)) = T((T + \nu E)(x)) - \nu(T + \nu E)(x) =$
$T(T(x)) + T(\nu x) - \nu T(x) - \nu^2 x = T^2(x) - \nu^2 x = 0$.
Damit ist entweder $(T + \nu E)(x) = 0$, also x ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $-\nu$, oder $(T + \nu E)(x) \neq 0$, dann ist $(T + \nu E)(x)$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert ν.

d) Die Rotation im $\mathbb{R}^2$ um $\pi/2$ hat keinen Eigenwert. Die Rotation im $\mathbb{R}^2$ um π bildet jedes $x \in \mathbb{R}^2$ auf $-x$ ab.

Aufgabe 1 Die reelle Matrix A ist symmetrisch. Es gibt daher ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. (Es müssen nicht unbedingt drei *verschiedene* Eigenwerte sein.) Wir wissen, dass $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ gilt.

Wir halten außerdem noch folgendes fest: Ist A positiv definit, so gilt dies auch für $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$, denn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} > 0\,.$$

Zum Beweis der Äquivalenz: Mit A ist auch A_1 positiv definit, und aus der Vorlesung wissen wir, dass dies äquivalent ist zu $a_1 > 0$ und $\det(A_1) > 0$. Da A positiv definit ist, müssen alle Eigenwerte > 0 sein, d. h. es gilt auch $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$.

Ist umgekehrt die rechte Seite der zu beweisenden Äquivalenz erfüllt, so folgt, dass A_1 positiv definit ist und zudem $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ gilt. Angenommen, A sei nicht positiv definit. Dann muss mindestens ein Eigenwert ≤ 0 sein. Wegen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ bedeutet das aber: Zwei der Eigenwerte müssen < 0 sein; o.B.d.A. seien dies λ_1 und λ_2. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ gilt dann (weil $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ ein Orthonormalsystem ist)

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T A(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2) &= (\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T(\alpha\lambda_1\vec{c}_1 + \beta\lambda_2\vec{c}_2) \\ &= \alpha^2\lambda_1\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_1 + \alpha\beta(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_2 + \beta^2\lambda_2\vec{c}_2^{\,T}\vec{c}_2 = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 < 0\,. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ derart, dass der Vektor $\vec{x} := \alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2$ als dritte Komponente 0 hat. Es gilt also $\vec{x} = (\mu, \nu, 0)$ mit gewissen $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, und für $\vec{x}_1 := (\mu, \nu)$ ergibt sich $\vec{x}_1^{\,T} A_1 \vec{x}_1 = \vec{x}^{\,T} A \vec{x} < 0$, im Widerspruch zur positiven Definitheit von A_1. Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

Als Kriterium für negative Definitheit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &A \text{ ist negativ definit} \iff -A \text{ ist positiv definit} \iff \\ &\quad -a_1 > 0,\ \det(-A_1) > 0,\ \det(-A) > 0 \iff a_1 < 0,\ \det(A_1) > 0,\ \det(A) < 0 \end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Determinanten muss also, mit $-$ beginnend, abwechseln.

Bemerkung: Mit vollständiger Induktion kann man die entsprechenden Aussagen auch für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zeigen.

Aufgabe 2 Für die Matrix A_β verwenden wir das Kriterium aus Aufgabe 1. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Bedingungen sind also erfüllt. Die Matrix ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist genau dann positiv definit, wenn $-2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B. Die beiden ersten Zeilen $\vec{b}_1^T$ und $\vec{b}_2^T$ von B sehen wie folgt aus:

$$\vec{b}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b}_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilden wir $\vec{x}^T B \vec{x}$ für $\vec{x} = (1, 0, \dots, 0)$, so ergibt sich folglich 1, wählen wir dagegen $\vec{x} = (1, -1, 0, \dots, 0)$, so ist $B\vec{x} = (-1, 1, *, \dots, *)$, wobei $*$ hier für irgendwelche Zahlen steht, also $\vec{x}^T B \vec{x} = -2$. Die Matrix B ist somit indefinit.

Dies gilt allerdings nur für $n \geq 2$, denn für $n = 1$ ist $B = (1)$ natürlich positiv definit.

Aufgabe 3 Wir schreiben die Gleichung zunächst in der Form

$$Q \ : \ \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} = 0\,, \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 3/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

Als erstes müssen wir nun die Matrix A diagonalisieren. Wegen

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$$

folgt: Die Matrix hat die beiden Eigenwerte 0 und 2. Wir bestimmen die Eigenräume:

$$A - 0E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

liefert

$$E(0) = L\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big)\,, \qquad E(2) = L\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Big)$$

Folglich haben wir

$$V^T A V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad V := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Dabei haben wir die Spalten von V so gewählt, dass $\det(V) = 1$ gilt und die zu $E(0)$ gehörenden Eigenvektoren (hier nur einer) in den letzten Spalten stehen.) Wir führen jetzt neue Koordinaten z_1 und z_2 mittels $(z_1, z_2) := \vec{z} := V^T \vec{x}$ ein, setzen also in obiger Gleichung $\vec{x} = V\vec{z}$. Dies liefert

$$(V\vec{z})^T A (V\vec{z}) + 2\vec{b}^T (V\vec{z}) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \vec{z}^T V^T A V \vec{z} + 2(V^T \vec{b})^T \vec{z} = 0\,.$$

Wegen $V^T A V = \operatorname{diag}(2, 0)$ und $V^T \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 3/3 \\ -9/2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(6, -3)$ bedeutet dies

$$2z_1^2 + 6\sqrt{2}\, z_1 - 3\sqrt{2}\, z_2 = 0\,.$$

Hier nehmen wir noch eine quadratische Ergänzung vor:

$$2(z_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,)^2 - 9 - 3\sqrt{2}\, z_2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad 2(z_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,)^2 - 3\sqrt{2}(z_2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,) = 0\,.$$

Mit den neuen Koordinaten $y_1 := z_1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ und $y_2 := z_2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ haben wir also die Normalform $2y_1^2 - 3\sqrt{2}\, y_2$. Es handelt sich um eine Parabel.

Die Koordinatentransformation, die wir durchgeführt haben, war

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{z} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V^T \vec{x} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3 \\ x_1 + x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Seien $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle \vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2, \vec{y}\rangle_A = \vec{y}^T A(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = \vec{y}^T A\vec{x}_1 + \lambda\vec{y}^T A\vec{x}_2) = \langle \vec{x}_1, \vec{y}\rangle_A + \lambda\langle \vec{x}_2, \vec{y}\rangle_A.$$

Da A symmetrisch ist, gilt $A = A^T$ und damit

$$\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle_A = \vec{x}^T A\vec{y} = (\vec{x}^T A\vec{y} =)^T = \vec{y}^T A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_A.$$

Schließlich gilt $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, wobei Gleichheit nur gilt im Falle, dass $\vec{x} = 0$.
(Falls dies nicht klar sein sollte: Sei $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j > 0$, so gilt $\vec{x} = \sum a_j\vec{b}_j$ für gewisse Zahlen $\vec{b}_j$ die nur im Falle $\vec{x} = 0$ alle gleich Null sind. Damit erhalten wir

$$\vec{x}^T A\vec{x} = (\sum_{j=1}^n a_j\vec{b}_j)^T A(\sum_{k=1}^n a_k\vec{b}_k) = \sum_{j,k=1}^n \vec{b}_j^T A\vec{b}_k = \sum_{j,k=1}^n \lambda_k\vec{b}_j^T\vec{b}_k = \sum_{j,k=1}^n \lambda_k\delta_{jk} = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Die rechte Seite ist nicht negativ und nur im Falle $\vec{x} = 0$ gleich Null.

b) Sei $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j\rangle_A = \vec{b}_k^T A\vec{b}_j = \delta_{jk}$. Wir müssen zeigen, dass $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_j\rangle\vec{b}_j$ die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist. Es gilt für alle $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}\langle A\vec{x}, \vec{b}_k\rangle &= \langle A\sum_{j=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_j\rangle\vec{b}_j, \vec{b}_k\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_j\rangle\langle A\vec{b}_j, \vec{b}_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_j\rangle\langle \vec{b}_j, \vec{b}_k\rangle_A = \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_j\rangle\delta_{jk} = \langle \vec{b}, \vec{b}_k\rangle.\end{aligned}$$

Un damit $\vec{x} = \vec{b}$.

Jeder der Vektoren $\vec{b}_j$ ist so genormt, dass $\vec{b}_j^T A\vec{b}_j = \langle \vec{b}_j, \vec{b}_j\rangle = 1$.
Wir zeigen mit VI, dass gilt $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j\rangle = 1$ für alle $1 \leq j < k \leq n$ (IV) mit Induktion über k. Der Induktinsanfang ($k = 1$) ist trivial.
(IS) ($k \to k + 1 \leq n$): Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \vec{d}_k, \vec{b}_j\rangle &= \langle \vec{r}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j\rangle_A\vec{b}_j, \vec{b}_j\rangle = \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j\rangle_A\vec{b}_j, \vec{b}_j\rangle - \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_l\rangle_A\langle \vec{b}_l, \vec{b}_j\rangle \\ &= \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j\rangle_A\vec{b}_j, \vec{b}_j\rangle - \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_l\rangle_A\delta_{jl} = \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j\rangle_A\vec{b}_j, \vec{b}_j\rangle - \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j\rangle_A = 0.\end{aligned}$$

Da $\vec{b}_k$ ein Vielfaches von $\vec{d}_k$ ist, folgt $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j\rangle = 0$.

Wäre $\vec{x}_k$ nicht schon die gesuchte Lösung, so erhielten wir $\vec{r}_k = 0$, weshalb das Verfahren nun keine Veränderung mehr brächte und auch nicht unseren Vorgaben entspräche, jedoch wir hätten damit schon die gesuchte Lösung $\vec{x}$. Ansonsten ist $\vec{r}_k \neq 0$.

Für $1 \leq j < k \leq n$ zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}
\langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle &= \langle A\vec{x}_{k-1} - \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = \left\langle A\vec{x}_{k-1}, \vec{b}_j \right\rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \\
&= \left\langle A \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{b}, \vec{b}_l \rangle \vec{b}_l, \vec{b}_j \right\rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{b}, \vec{b}_l \rangle \left\langle \vec{b}_l, \vec{b}_j \right\rangle_A - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{b}, \vec{b}_l \rangle \delta jl - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = 0,
\end{aligned}$$

dass $\vec{r}_k$ senkrecht auf $\mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{k-1}) = \mathrm{Lin}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{k-1})$ steht. Ist $\vec{r}_k \neq 0$, so haben wir damit gezeig, dass $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ linear unabhängig ist.

Es fehlt noch zu zeigen, dass für $1 \leq j \leq k-2$ gilt $\langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A$:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 - 0 = \langle r_k, r_j \rangle - big < r_{k-1}, r_j \rangle = \langle r_k - r_{k-1}, r_j \rangle \\
&= \langle Ax_k - b - Ax_{k-1} + b, r_j \rangle = \langle A(x_k - x_{k-1}), r_j \rangle = \langle x_k - x_{k-1}, r_j \rangle_A \\
&= c \langle \vec{d}_k, r_j \rangle_A
\end{aligned}$$

für eine Konstante $c \neq 0$. (Im Fall $j = 1$ muss diese Rechnung noch etwas angepasst werden.)

Was bringt uns das?

Der größte Aufwand in jedem Schritt ist die Berechnung des Vektors $\vec{d}_k$. Mit $\langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A$ für $1 \leq j \leq k-2$ wird aus

$$\vec{d}_k := \vec{r}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j,$$

was k Rechenschritte beinhaltet, die Rechnung $\vec{d}_k := \vec{r}_k - \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_{k-1}$.

c) Seien $f, f_1, f_2, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle &= \int_0^1 g^T(x) A (f_1 + \lambda f_2)(x)\; dx \\
&= \int_0^1 g^T(x) A f_1(x)\; dx + \lambda \int_0^1 g^T(x) A f_2(x)\; dx = \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle.
\end{aligned}$$

Da A symmetrisch ist, gilt $A = A^T$ und damit

$$f^T(x) A g(x) = (f^T(x) A g(x))^T = g^T(x) A^T f(x) = g^T(x) A f(x).$$

Damit ergibt sich (einfach einsetzen): $\langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle$.

$\langle f, f \rangle \geq 0$ ist klar, da der Integrand nie negativ wird. Ist $f \neq 0$, so ist $f(x) \neq 0$

für ein $x \in (0,1)$ und damit ist der stetige Integrand auf einer Umgebung dieses x echt positiv, und folglich $\langle f, f \rangle > 0$.

Ist A nicht symmetrisch, so gibt es ein Paar i, j, mit $a_{ij} \neq a_{ji}$. Wir setzen $f(x) := e_j$ und $g(x) := e_i$. für diese konstanten Funktionen gilt $g^T(x)Af(x) = e_i^T Ae_j = a_{ij}$ und $f^T(x)Ag(x) = e_j^T Ae_i = a_{ji}$ für jedes $x \in [0,1]$ und damit $\langle g, f \rangle = a_{ji} \neq a_{ij} = \langle f, g \rangle$.

Ist A zwar symmetrisch, aber nicht positiv definit, so gibt es $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq 0$ und $\vec{x}^T A\vec{x} \leq 0$. Setzten wir $f(x) = \vec{x}$, so gilt für diese konstante Funktion $\langle f, f \rangle = \vec{x}^T A\vec{x} \leq 0$.

A darf von x abhängen, solange die Funktion $x \mapsto g(x)^T A(x)f(x)$ noch integrierbar ist für alle stetigen Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Diese Aussage ist in dieser Allgemeinheit zwar korrekt, jedoch mit unseren Mitteln kaum zu beweisen (wesentliches Argument im Beweis: das Lebesguemaß ist sigma-additiv). Das Problem ist die positive Definitheit.
Wir zeigen dies für den Fall, dass A stetig ist in allen Einträgen. Damit ist auch die Funktion $x \mapsto f^T(x)A(x)f(x)$ stetig, nicht negativ und nur dann überall gleich Null, wenn f die Nullfunktion ist. Mit dem Standardargument folgt $\langle f, f \rangle = 0 \to f = 0$.

Aufgabe 1 • Die Funktion f hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\,dx \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Es ergibt sich $\widehat{f}(0) = 0$, und für $k \neq 0$ liefert Produktintegration

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\,dx &= x \cdot \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx \\ &= \frac{\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{ikx}}{(-ik)^2}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi i(-1)^k}{k} - 0\,.\end{aligned}$$

(Beachte: Es gilt $e^{ik(\pm\pi)} = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.) Also haben wir $\widehat{f}(k) = i(-1)^k/k$ für $k \neq 0$, und die Fourierreihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{k}(e^{ikx} - e^{-ikx})\,.$$

Wenn man will, kann man daraus auch noch die Koeffizienten in der Darstellung

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)\big)$$

der Fourierreihe gewinnen: Laut Vorlesung gilt

$$\alpha_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \quad (k \geq 0) \qquad \text{und} \qquad \beta_k = i\big(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)\big) \quad (k \geq 1)\,.$$

In unserem Falle ergibt sich $\alpha_k = 0$ und $\beta_k = 2(-1)^{k+1}/k$.

Bemerkung: Da f stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion an allen Stetigkeitsstellen dar; an den Unstetigkeitsstellen $x_k = (2k+1)\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$.

• Die Funktion g ist nicht 2π-periodisch, sie hat vielmehr die Periode $T := 4$. Daher setzen wir $\omega := 2\pi/T$ und betrachten die 2π-periodische Funktion G, die gegeben ist durch $G(y) := g(y/\omega)$. Falls $x \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass die Funktion G an der Stelle ωx durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, gilt

$$g(x) = G(\omega x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{G}(k)e^{ik\omega x}\,.$$

Diese Reihe heißt daher die Fourierreihe von g, und man schreibt $\widehat{g}(k) = \widehat{G}(k)$. Es gilt

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(y)e^{-iky}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y/\omega)e^{-iky}\,dy\,;$$

wegen $g(x) = 1$ für $x \in (-2, 0)$ und $g(x) = 1 + 2x$ für $x \in (0, 2)$ folgt

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2(y/\omega)e^{-iky}\,dy\,;$$

für $k=0$ ergibt sich hier $1+\frac{1}{2\pi}\cdot\pi^2/\omega=2$; sonst gilt (Produktintegration)

$$\begin{aligned}
&= 0+\frac{2}{2\pi\omega}\left(y\cdot\frac{e^{-iky}}{-ik}\,\Big|_{y=0}^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{e^{-iky}}{-ik}\,dy\right)=\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik}-\frac{e^{-iky}}{(-ik)^2}\,\Big|_{y=0}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2i(-1)^k}{k\pi}-\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^k-1}{-k^2}=\frac{2i(-1)^k}{k\pi}+\frac{2(-1)^k-2}{k^2\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe berechnet. Will man noch die α_k und β_k bestimmen, so erhält man $\alpha_0=4$ und $\alpha_k=4((-1)^k-1)/(k^2\pi^2)$ sowie $\beta_k=4(-1)^{k+1}/(k\pi)$ für $k\geq 1$.

Bemerkung: Eine beliebige T-periodische Funktion g hat also die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{g}(k)=\widehat{G}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y/\omega)e^{-iky}\,dy=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(x)e^{-ik\omega x}\,dx\,,$$

wie man mit der Substitution $x=y/\omega$ einsieht.

• Die Funktion h ist wieder 2π-periodisch. Zur Abwechslung berechnen wir diesmal direkt die Koeffizienten α_k und β_k in der Cosinus/Sinus-Darstellung der Fourierreihe. Da h eine gerade Funktion ist, gilt $\beta_k=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Für $k\geq 0$ ist

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx$$

Zweimalige Produktintegration liefert

$$\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx\\
&= 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,\Big|_{x=-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2\sin(\tfrac{1}{2}x)(-k\sin(kx))\,dx\\
&= 2\big(\cos(k\pi)+\cos(-k\pi)\big)+2k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx\\
&= 4(-1)^k+2k\left(-2\cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,\Big|_{x=-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}-2\cos(\tfrac{1}{2}x)(k\cos(kx))\,dx\right)\\
&= 4(-1)^k-0+4k^2I_k\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k=4(-1)^k+4k^2I_k$; dies bedeutet $I_k=4(-1)^k/(1-4k^2)$. Damit kennen wir $\alpha_k=I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe

$$\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}\cos(kx)\,.$$

Hieraus kann man auch die $\widehat{h}(k)$ ablesen, und zwar mittels der Formeln

$$2\widehat{h}(k)=\alpha_k-i\beta_k\qquad\text{und}\qquad 2\widehat{h}(-k)=\alpha_k+i\beta_k\qquad(\text{wobei }\beta_0:=0)\,.$$

Aufgabe 2 **a)** Eine reine Cosinusreihe ergibt sich für gerade Funktionen; also setzen wir f hier zu einer 2π-periodischen, geraden Funktion F fort:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0,\pi], \\ -x - \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x+2\pi) := F(x)$$

Für die Fourierkoeffizienten α_k und β_k von F gilt dann $\beta_k = 0$ und

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2})\cos(kx)\,dx\,.$$

Offenbar ist $\alpha_0 = 0$ und für $k \neq 0$ haben wir

$$\int x\cos(kx)\,dx = \frac{x\sin(kx)}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k}\,dx = \frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\,.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 0\,.$$

Das bedeutet $\alpha_{2n} = 0$ (gilt auch für α_0) und $\alpha_{2n+1} = -4/((2n+1)^2\pi)$. Da F stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ dar, es gilt also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi}\cos((2n+1)x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\,.$$

b) Eine reine Sinusreihe erhalten wir, wenn wir f zu einer ungeraden Funktion fortsetzen:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0,\pi], \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x+2\pi) := F(x)$$

Dann gilt $\alpha_k = 0$ für alle $k \geq 0$ und

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2})\sin(kx)\,dx$$

für alle $k \geq 1$. Produktintegration liefert

$$\int x\sin(kx)\,dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k}\,dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\,,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi(-1)^k}{k} + \frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_{x=0}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k} = -\frac{(-1)^k + 1}{k}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\beta_{2n-1} = 0$ und $\beta_{2n} = -1/n$ für alle $n \geq 1$. Da F stückweise glatt ist, wird die Funktion in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt; wir erhalten also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(2nx) \qquad \text{für } x \in (0,\pi)\,.$$

(An den Stellen $x_k = k\pi$ konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(F(0+) + F(0-)) = 0$.)

Aufgabe 3 Setzen wir in die Darstellung aus **2 b)** $x = \pi/4$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(n\pi/2) = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - + \cdots .$$

Die erste Reihe hat also den Wert $\pi/4$.

Setzen wir in die Darstellung aus **2 a)** $x = 0$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} = -\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) .$$

Die zweite Reihe ergibt also $\pi^2/8$.

Aufgabe 4 Wir setzen

$$x(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

und nehmen an, dass diese Reihe konvergiert und man gliedweise differenzieren kann. Damit gilt

$$\begin{aligned}
-ie^{-it}\dot{x}(t) + x(t) &= -ie^{-it}\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k e^{i(k-1)t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)c_{k+1} e^{ikt} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k + (k+1)c_{k+1}) e^{ikt}.
\end{aligned}$$

Dies muss gleich $f(t)$ sein, damit x eine Lösung ist. Das ist dann der Fall, wenn

$$\widehat{f}(k) = c_k + (k+1)c_{k+1} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

gilt. Da f gegeben ist, können wir auch $\widehat{f}(k)$ berechnen. Freundlicherweise ist f schon als trigonometrischen Reihe dargestellt, weshalb wir einfach ablesen können, dass gilt $\widehat{f}(k) = 1/(k!)$ für gerades $k \geq 0$ und $\widehat{f}(k) = 0$ sonst.

Die zusätzliche Bedingung $\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = 0$, zusammen mit der Annahme, dass wir im Folgenden die unendliche Summe aus dem Integral herausziehen dürfen ergibt:

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi\delta_{k0} = 2\pi c_0,$$

dies bedeuted einfach $c_0 = 0$.

Damit erhalten wir $c_k = 0$ für $k \leq 0$ und für $k > 0$ die Rekursionsvorschrift

$$c_{k+1} = \frac{\widehat{f}(k) - c_k}{1+k}.$$

Eine einfache Abschätzung zeigt, dass es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass $|c_n| \leq K2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daran sieht man, dass die Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

gleichmäßig konvergiert und genauso die Reihe über die gliedweise differenzierten Ausdrücke. Damit dürfen wir x gleidweise differenzieren. Und die zusätzliche Annahme (Vertauschung von Summe und Integral) gilt. Nach Konstruktion ist x 2π-periodisch. x erfüllt somit alle Bedingungen.

Aufgabe 5

a) Für Funktionen $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f + \lambda g$ wieder eine beschränkte Funktion $(-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, die an allen Stellen Stetig ist, an denen sowohl f als auch g stetig sind. Also ist $f + \lambda g$ höchstens an den endlich vielen Stellen unstetig an denen f oder g unstetig ist. Insgesamt liegt $f + \lambda g$ in V.

b) Für Funktionen $f, g \in V$ ist $f\bar{g}$ wieder eine beschränkte Funktion $(-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, die höchstens an den endlich vielen Stellen unstetig ist, an denen f oder g unstetig ist. Insgesammt gilt damit, dass $f\bar{g}$ über $(-\pi, \pi)$ integrierbar ist.

Weiter gilt für $f, f_1, f_2 \in V$ und für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle g, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\bar{f}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\bar{g}(t)f(t)}\ dt = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\ dt} = \overline{\langle f, g \rangle},$$

$$\begin{aligned}\langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f_1(t) + \lambda f_2(t)\big)\bar{g}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\bar{g}(t)\ dt + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t)\bar{g}(t)\ dt \\ &= \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle\end{aligned}$$

und schließlich $\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{f}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\ dt \geq 0$. Lediglich $\langle f, f \rangle = 0$ muss nicht bedeuten, dass f die Nullfunktion ist. Allerdings kann f dann nicht ungleich Null an einer seiner Stetigkeitsstellen sein, etwa an t_0, denn mit f ist auch $|f|^2$ stetig und sonst wäre $|f(t)|^2$ auf einem Intervall größer als $\frac{|f(t_0)|^2}{2}$ und damit das Integral echt positiv.

c) Die Lösung hierfür wird in der Übung vorgerechnet.

Aufgabe 1 **a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f offensichtlich stetig. Sie ist aber auch im Punkt $(0,0)$ stetig: Es gelte $(x_n, y_n) \to (0,0)$ mit $(x_n, y_n) \neq (0,0)$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ mit $(x_n, y_n) = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) = f(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n) &= \frac{(r_n \cos\varphi_n)(r_n \sin\varphi_n)^2}{(r_n \cos\varphi_n)^2 + (r_n \sin\varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3 \cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{r_n^2} = r_n \cos\varphi_n \sin^2\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

weil $r_n \to 0$ strebt und die Folge $(\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n)$ beschränkt ist.

b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Wählt man jedoch ein festes φ, so ist entweder $\cos\varphi = 0$, also $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0$ für alle r, oder aber wir haben

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0\,.$$

c) Die Unstetigkeit in $(0,0)$ folgt sofort aus $h(x,x) = 1$ für $x \neq 0$, denn dies bedeutet ja $h(x,x) \to 1$ für $x \to 0$. Nun sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Im Falle $x = 0$ gilt $h(x,y) = 0$ für alle y, also $\lim_{y\to 0} h(x,y) = 0$. Aber auch im Falle $x \neq 0$ ergibt sich

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2 + (1 - y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 2 Für $\vec{x} := \vec{e}_1$ Erhalten wir $0 = f(\vec{x}) = f(\frac{1}{m}\vec{x})$.
Damit gilt $\frac{1}{m}\vec{x} \to \vec{0}$ und $f(\frac{1}{m}\vec{x}) = 0 \to 0$ $(m \to \infty)$. Daher muss, unabhängig von α, $f(\vec{0}) = 0$ gewählt werden, wenn wir f stetig fortstetzen wollen. Auch können sonst keine partiellen Ableitungen oder gar Richtungsableitungen in $\vec{0}$ existieren. Sei also $f(\vec{0}) := 0$.

a) Wir betrachten zunächst alle Werte $\alpha \geqslant 1$ und setzen dafür

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für große m, so dass $\|\frac{1}{m}\vec{x}\| \leqslant 1$ gilt die Abschätzung

$$\|\frac{1}{m}\vec{x}\|^{\alpha n} \leqslant \|\frac{1}{m}\vec{x}\|^n = \|\vec{x}\|^n m^{-n}.$$

Damit erhalten wir

$$f\big(\frac{1}{m}\vec{x}\big) = \frac{\frac{1}{m}\frac{1}{m}\cdots\frac{1}{m}}{\|\frac{1}{m}\vec{x}\|^{\alpha n}} = \frac{m^{-n}}{\|\frac{1}{m}\vec{x}\|^{\alpha n}} \geqslant \frac{m^{-n}}{\|\vec{x}\|^n m^{-n}} = \frac{1}{\|\vec{x}\|^n}(= n^{-n/2}) > 0.$$

Damit konvergiert $f(\frac{1}{m}\vec{x})$ nicht gegen 0, aber $\frac{1}{m}\vec{x} \to \vec{0}$. Folglich ist f nicht stetig.

Nun sei $\alpha < 1$. Wir zeigen, dass f stetig ist im Nullpunkt. Wir müssen für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta$ gilt $|f(\vec{x}) - f(\vec{0})| = |f(\vec{x})| \leqslant \varepsilon$. Sei also $\varepsilon > 0$.

Wir setzten $\nu := 1 - \alpha > 0$ und $\delta := \varepsilon^{\frac{1}{\nu n}} > 0$. Sei nun also $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{x}\| < \delta$. Wir können wie folgt abschätzen:

$$|f(\vec{x})| \leqslant \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|\cdots\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^{(1-\nu)n}} = \frac{\|\vec{x}\|^n}{\|\vec{x}\|^n}\|\vec{x}\|^{\nu n} = \|\vec{x}\|^{\nu n} \leqslant \delta^{\nu n} = \varepsilon.$$

f ist also stetig.

b) Unabhängig von α ergibt die Definition von f, dass gilt $f(\vec{0} + h\vec{e_j}) = f(h\vec{e_j}) = 0 = f(\vec{0})$ für jedes $h \in \mathbb{R}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Damit gilt $f(\vec{0} + h\vec{e_j}) - f(\vec{0}) = 0$ und inbesondere

$$D_j f(\vec{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(\vec{0} + h\vec{e_j}) - f(\vec{0})) = 0.$$

Alle partiellen Ableitungen existieren.

c) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ eine Richtung. Dass die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(\vec{0})$ existiert muss folgender Grenzwert existieren:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(\vec{0} + h\vec{v}) - f(\vec{0})) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h\vec{v})) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{hv_1 hv_2 \cdots hv_n}{\|h\vec{v}\|^{\alpha n}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^n}{hh^{\alpha n}} \frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{\|\vec{v}\|^{\alpha n}} = \lim_{h\to 0} h^{n-1-\alpha n} f(\vec{v}).\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert genau dann, wenn $n - 1 - \alpha n \geqslant 0$, also für $\alpha \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

d) Aus Teil **c)** sehen wir $D_{\vec{v}} f(\vec{0}) = \lim_{h\to 0} h^{n-1-\alpha n} f(\vec{v})$. Für $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$ ist der Grenzwert Null, für $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ ist der Grenzwert $f(\vec{v})$, was ungleich Null sein kann.
Jedoch ist $\operatorname{Grad} f(\vec{0})$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ in jeder Komponente Null (siehe **b)**). Damit gilt insbesondere $\vec{v} \cdot \operatorname{Grad} f(\vec{0}) = 0$ für jedes $\alpha \leqslant 1 - \frac{1}{n}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. (In der Vorlesung wird Differenzierbarkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. Für $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ kann man schließen, dass f nicht Differenzierbar ist, denn sonst müßten für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ beide Terme übereinstimmen.

Aufgabe 3 Wir setzen

$$\vec{u} := \int_a^b \vec{r}(t)\,dt\,.$$

Dann ist entweder $\vec{u} = \vec{0}$ und damit die behauptete Ungleichung trivial (weil auf der linken Seite 0 steht), oder aber wir können $\vec{v} := \vec{u}/\|\vec{u}\|$ definieren und haben

$$\left\| \int_a^b \vec{r}(t)\,dt \right\| = \|\vec{u}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\int_a^b \vec{r}(t)\,dt \right) \cdot \vec{v} = \int_a^b \vec{r}(t)\cdot\vec{v}\,dt\,.$$

(Dass man das Innenprodukt „in das Integral hineinziehen“ kann, ergibt sich aus der komponentenweisen Definition des Integrals.)

Wegen $\vec{r}(t)\cdot\vec{v} \leqslant |\vec{r}(t)\cdot\vec{v}\,| \leqslant \|\vec{r}(t)\|\cdot\|\,\vec{v}\| = \|\vec{r}(t)\|$ folgt dann

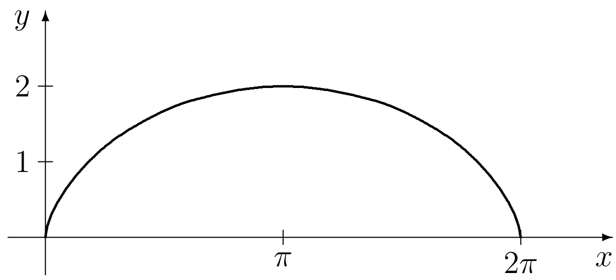
$$\left\| \int_a^b \vec{r}(t)\,dt \right\| = \int_a^b \vec{r}(t)\cdot\vec{v}\,dt \leqslant \int_a^b \|\vec{r}(t)\|\,dt\,.$$

Aufgabe 4 **a)** Es gilt $\vec{r}\,'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(t)\|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t \\ &= 2\big(1-\cos(\tfrac12 t + \tfrac12 t)\big) = 2\big(1-\cos^2(\tfrac12 t) + \sin^2(\tfrac12 t)\big) = 4\sin^2(\tfrac12 t)\,.\end{aligned}$$

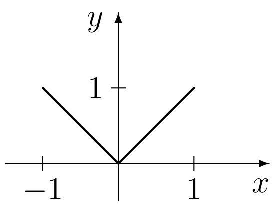
Definitionsgemäß ist also

$$L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac12 t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac12 t)\,dt = -4\cos(\tfrac12 t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



b) Hier geht es um die Kurve $\vec{r}(t) = (t, f(t)) = (t, |t|)$, $t \in [-1,1]$. Deren Länge ist

$$L(\vec{r}\,) = \int_{-1}^1 \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_{-1}^0 \|(1,-1)\|\,dt + \int_0^1 \|(1,1)\|\,dt = \int_{-1}^1 \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,.$$

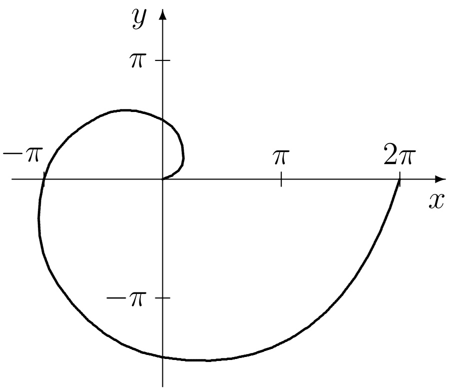


c) Mit dieser Schreibweise ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, gemeint. Wegen $\vec{r}\,'(t) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(\varphi)\|^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi \\ &= 1 + \varphi^2\,,\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}&L(\vec{r}\,) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}+\sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\operatorname{arsinh}2\pi}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,.\end{aligned}$$

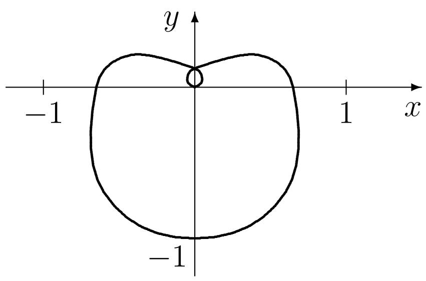


d) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{1}{3}t)\tfrac{1}{3}\cos t - \sin^3(\tfrac{1}{3}t)\sin t \\ &= \sin^2(\tfrac{1}{3}t)(\cos(\tfrac{1}{3}t)\cos t - \sin(\tfrac{1}{3}t)\sin(t)) = \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{4}{3}t)\,,\end{aligned}$$

und genauso $y'(t) = \sin^2(\frac{1}{3}t)\sin(\frac{4}{3}t)$. Folglich ist die Länge der Kurve

$$\begin{aligned}\int_0^{6\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt &= \int_0^{6\pi}\sqrt{\sin^4(\tfrac{1}{3}t)\cos^2(\tfrac{4}{3}t) + \sin^4(\tfrac{1}{3}t)\sin^2(\tfrac{4}{3}t)}\,dt \\ &= \int_0^{6\pi}\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{6\pi}\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt + \int_0^{6\pi}\cos^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt\right) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi\,.\end{aligned}$$



(Die Kurve wird bei der gegebenen Parametrisierung zweimal durchlaufen, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn.)

Aufgabe 5 Es handelt sich um den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z = 1 - x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1\,, \quad \text{also} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 0$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,y)^2 = 0\,.$$

Bei dieser Kreisgleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cos t, \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,y = \tfrac{1}{2}\sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Dann haben wir $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$. Also:

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\vec{x}(t)$ ist

$$\vec{x}\,'(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor hierzu ist beispielsweise $\vec{n} := (1, 0, 1)$.

Nun berechnen wir noch

$$s(t) := L_0^t(\vec{x}\,) = \int_0^t \|\vec{x}\,'(\tau)\|\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + 2\cos^2\tau + \sin^2\tau}\,d\tau = t/\sqrt{2}\,.$$

Die Darstellung bezüglich der Bogenlänge ist dann wegen $t = \sqrt{2}\,s$ gegeben durch

$$\vec{x}(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(\sqrt{2}\,s) \\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,s) \\ 1 - \cos(\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 6 **a)** Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\vec{x}(t_0) + \lambda\vec{x}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\vec{x}(t_0)$. Für $t_0 = \pm 1$ ist dieser Ausdruck jedoch nicht definiert. Wir bilden daher noch

$$\|\vec{x}\,'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{2}{1-t^2}}\,,$$

und betrachten

$$\frac{\vec{x}\,'(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{1-t^2}/\sqrt{2} \\ -t/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Hier können wir $t = \pm 1$ einsetzen (genauer: den Grenzübergang $t \to \pm 1$ machen) und erhalten die Tangentenvektoren $(1/\sqrt{2}, 0, \mp 1/\sqrt{2})$. In den Punkten $\vec{x}(-1) = (-\frac{\pi}{2}, -1, 0)$ und $\vec{x}(1) = (\frac{\pi}{2}, 1, 0)$ ergeben sich also die Tangenten

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir haben

$$s(t) := \int_{-1}^{t} \|\vec{x}\,'(\tau)\|\, d\tau = \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\, d\tau = \sqrt{2}\,\operatorname{Arcsin}\tau\Big|_{\tau=-1}^{t} = \sqrt{2}\,(\operatorname{Arcsin} t + \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve die Länge $s(1) = \sqrt{2}\,\pi$ und wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin} t, \qquad \text{also} \qquad t = t(s) = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$$

ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge

$$\vec{x}(s) = \vec{x}(t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 7 Es gilt $\vec{x}(t) = (tf(t), f(t))$ für $f(t) := (t^2-1)/(t^2+1)$. Wegen

$$f'(t) = \frac{2t(t^2+1) - (t^2-1)2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

folgt dann

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} f(t) + tf'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2-1}{t^2+1} + \dfrac{4t^2}{(t^2+1)^2} \\ \dfrac{4t}{(t^2+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2} \\ \dfrac{4t}{(t^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Eine waagerechte Tangente liegt genau dann vor, wenn die zweite Komponente dieses Vektors 0 wird, d. h. wenn $t = 0$ gilt. Dies liefert den Punkt $P_1 = (0, -1)$.

Für Punkte mit senkrechter Tangente muss die erste Komponente des obigen Vektors verschwinden. Für $u := t^2$ bedeutet dies

$$u^2 + 4u - 1 = 0, \qquad \text{also} \qquad u_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+1}\,.$$

Da $u = t^2 < 0$ nicht möglich ist, haben wir zwei Lösungen $t_{1,2} = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$. Berechnen wir die Punkte: Es gilt

$$f(t_{1,2}) = \frac{-2+\sqrt{5}-1}{-2+\sqrt{5}+1} = \frac{-3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{(-3+\sqrt{5}\,)(1+\sqrt{5}\,)}{5-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

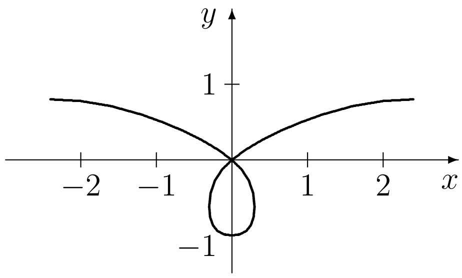
Weiter hat man

$$\begin{aligned} t_{1,2}f(t_{1,2}) &= \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}\cdot\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}\,) = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2+\sqrt{5}\,)(1-\sqrt{5}\,)^2} \\ &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2+\sqrt{5}\,)(6-2\sqrt{5}\,)} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-22+10\sqrt{5}}\,. \end{aligned}$$

In folgenden Punkten liegt also eine senkrechte Tangente vor:

$$P_2 = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22},\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}\,)\right), \qquad P_3 = \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22},\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}\,)\right).$$

Die Kurve besitzt einen Doppelpunkt, denn sowohl $t = -1$ als auch $t = 1$ liefert den Punkt $P_4 = (0,0)$.



Eine parameterfreie Darstellung erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} (x,y) = \vec{x}(t) \quad \text{für ein } t\in\mathbb{R} \quad &\leftrightarrow \quad x = ty \quad \text{und} \quad y = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{für ein } t\in\mathbb{R} \\ &\leftrightarrow \quad x = y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{(x/y)^2-1}{(x/y)^2+1} \quad \leftrightarrow \quad x = y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ &\leftrightarrow \quad y(x^2+y^2) = x^2-y^2\,. \end{aligned}$$

Injektivität bedeutet $t_1 \neq t_2 \to \vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2)$. Wir haben aber schon gezeigt, dass $\vec{x}$ einen Doppelpunkt hat. Das genau bedeutet aber, dass $\vec{x}$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 1 **a)** Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad D_2 f(x,y) = -4x^2 y + 12xy^2 + 4y^3 \,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} D_1 D_1 f(x,y) &= 6x - 4y^2 \,, & D_2 D_2 f(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2 \,, \\ D_1 D_2 f(x,y) &= -8xy + 12y^2 \,, & D_2 D_1 f(x,y) &= -8xy + 12y^2 \,. \end{aligned}$$

Dass $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion f ist offenbar zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2 y + 2x + y^3)e^{xy} \,, \\ D_2 f(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy} \,. \end{aligned}$$

Weiter gilt dann

$$\begin{aligned} D_1 D_1 f(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2 y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy} \,, \\ D_2 D_2 f(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy} \,, \\ D_1 D_2 f(x,y) &= (3x^2+y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= D_2 D_1 f(x,y) \,. \end{aligned}$$

c) Es ergibt sich

$$D_1 f(x,y,z) = e^y/z \,, \qquad D_2 f(x,y,z) = xe^y/z \,, \qquad D_3 f(x,y,z) = -xe^y/z^2 \,.$$

Weiter haben wir

$$D_1 D_1 f(x,y,z) = 0 \,, \qquad D_2 D_2 f(x,y,z) = xe^y/z \,, \qquad D_3 D_3 f(x,y,z) = 2xe^y/z^3 \,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 f(x,y,z) &= e^y/z = D_2 D_1 f(x,y,z) \,, \\ D_1 D_3 f(x,y,z) &= -e^y/z^2 = D_3 D_1 f(x,y,z) \,, \\ D_2 D_3 f(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = D_3 D_2 f(x,y,z) \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 **a)** $D_1 f_1(x,y,z) = y^2z^3 e^{xy^2z^3} + xy^2z^3 e^{xy^2z^3} y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}$; ebenso berechnet man die anderen Ableitungen. Die Jakobimatrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} J_{\vec f}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & D_3 f_2 \end{pmatrix} (x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

b) Diesmal haben wir $J_{\vec{f}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Und hier erhalten wir die $(1,3)$-Matrix

$$J_f(x,y,z) = \left(\frac{y}{1+(xy)^2} + e^z\sinh(x+y) \quad \frac{x}{1+(xy)^2} + e^z\sinh(x+y) \quad e^z\cosh(xy)\right).$$

d) Wegen $x^y = e^{y\ln x}$ ergibt sich $D_1f(x,y,z) = e^{y\ln x}y/x$ und $D_2f(x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f offenbar stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \le |xy|$ und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) &= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

und wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} D_2f(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-f(y+h,x)+f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(y+h,x)-f(y,x)}{h} = -D_1f(y,x) = -\frac{y^4x+4y^2x^3-x^5}{(y^2+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} D_1f(x,y) \\ D_2f(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 \\ x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun noch den Nullpunkt: Es ist

$$D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

und genauso

$$D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Somit ist $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) Definitionsgemäß gilt

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2+0)^2} = 1\,.$$

Ebenso erhält man

$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 + 0 - h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = J_f(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 & x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|,|y|\}$. Es gilt

$$|D_1 f(x,y)| = \frac{|x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6 \max\{|x|,|y|\}\,.$$

Damit folgt $D_1 f(x,y) \to 0 = D_1 f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass $D_2 f$ in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sei, denn sonst müssten diese beiden Ableitungen $D_2 D_1 f$ und $D_1 D_2 f$ übereinstimmen (Satz von Schwarz).

Aufgabe 4 **a)** Diese Funktion ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offenbar stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x,y) \neq (0,0)$ und $z := \max\{|x|,|y|\}$, so gilt

$$|f(x,y)| = \left| \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y^3| + |x^2 y|}{x^2+y^2} \leq \frac{z^3 + z^3}{z^2} = 2z = 2\max\{|x|,|y|\}\,,$$

und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$D_1 f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2 y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haben wir also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3-0}{0+h^2} = 1\,.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Betrachtet man

$$D_1 f(x,x) = \frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 0 = D_1 f(0,0)\,,$$
$$D_2 f(x,0) = \frac{-x^4+0+0}{(x^2+0)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 1 = D_2 f(0,0)\,,$$

so sieht man: Weder $D_1 f$ noch $D_2 f$ ist im Punkt $(0,0)$ stetig.

d) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{v}\,)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1,hv_2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3-(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3-h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}\,.$$

Dies soll nun mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) \cdot \vec{v} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \iff 2v_1^2v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen $\vec{v}$ gilt die Gleichung $D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$. Folglich kann die Funktion in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein (denn sonst müsste ja laut Vorlesung die Gleichung für alle Richtungen gelten). Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist sie aber stetig differenzierbar, also auch differenzierbar, mit

$$f'(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

a)

$$\nabla(fg) = \begin{pmatrix} D_1(fg) \\ \vdots \\ D_n(fg) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_1 f)g + f(D_1 g) \\ \vdots \\ (D_n f)g + f(D_n g) \end{pmatrix} = g(\nabla f) + f(\nabla g)$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (f\vec{\phi}\,) &= \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f\phi_1 \\ f\phi_2 \\ f\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2(f\phi_3) - D_3(f\phi_2) \\ D_3(f\phi_1) - D_1(f\phi_3) \\ D_1(f\phi_2) - D_2(f\phi_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (D_2 f)\phi_3 + f(D_2\phi_3) - (D_3 f)\phi_2 - f(D_3\phi_2) \\ (D_3 f)\phi_1 + f(D_3\phi_1) - (D_1 f)\phi_3 - f(D_1\phi_3) \\ (D_1 f)\phi_2 + f(D_1\phi_2) - (D_2 f)\phi_1 - f(D_2\phi_1) \end{pmatrix} \\
&= f \begin{pmatrix} D_2\phi_3 - D_3\phi_2 \\ D_3\phi_1 - D_1\phi_3 \\ D_1\phi_2 - D_2\phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (D_2 f)\phi_3 - (D_3 f)\phi_2 \\ (D_3 f)\phi_1 - (D_1 f)\phi_3 \\ (D_1 f)\phi_2 - (D_2 f)\phi_1 \end{pmatrix} = f(\nabla \times \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \times \vec{\phi}\,,
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (f\vec{\phi}\,) &= \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f\phi_1 \\ \vdots \\ f\phi_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} D_k(f\phi_k) = \sum_{k=1}^{n} (D_k f)\phi_k + f(D_k\phi_k) \\
&= f\sum_{k=1}^{n} D_k\phi_k + \sum_{k=1}^{n} (D_k f)\phi_k = f(\nabla \cdot \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{\phi}\,.
\end{aligned}$$

d) Wegen $\vec{g} = f\vec{\phi}$ mit

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \quad \vec{\phi}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{\phi}\,) = f(\nabla \times \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \times \vec{\phi}$.

Offenbar ist $\nabla \times \vec{\phi} = \vec{0}$ und $D_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8 - 2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f) \times \vec{\phi} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{\phi}\,) = f(\nabla \cdot \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{\phi} \\
&= 3f + \frac{8 - 2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 Wir verwenden die Darstellung $\Delta = \nabla^T \nabla = \nabla \cdot \nabla$ des Laplaceoperators. Aus $D_k(fg) = (D_k f)g + f(D_k g)$ folgt $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$. Damit ergibt sich

$$\Delta(fg) = \nabla \cdot \big(\nabla(fg)\big) = \nabla \cdot \big((\nabla f)g + f(\nabla g)\big) = \nabla \cdot \big(g(\nabla f)\big) + \nabla \cdot \big(f(\nabla g)\big)\,;$$

auf beide Summanden wenden wir nun die Formel aus Aufgabe 7 an (Beachte: f und g sind skalarwertig, ∇f und ∇g sind vektorwertig) und erhalten

$$\begin{aligned} &= g\big(\nabla \cdot (\nabla f)\big) + (\nabla g) \cdot (\nabla f) + f\big(\nabla \cdot (\nabla g)\big) + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \\ &= g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 $\vec{f}$ bildet die Zylinderkoordinaten r, ϕ, z eines Punktes das $\mathbb{R}^3$ auf dessen Standardkooridinaten ab.

Zunächst berechnen wir die Jakobimatrix:

$$J_{\vec{f}} = \vec{f}' = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & D_3 f_2 \\ D_1 f_3 & D_2 f_3 & D_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & +r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\det J_{\vec{f}} = 1 \det \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{smallmatrix}\right) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$.

Aufgabe 1 Wir betrachten zunächst den Schnitt von T mit einer Ebene der Form $z = c$. Wegen $b \sin u \in [-b, b]$ ergibt sich für $|c| > b$ die leere Menge. Für $c = \pm b$ ergibt sich genau ein u mit $b \sin u = c$, nämlich $u = \frac{\pi}{2}$ bzw. $u = \frac{3\pi}{2}$. Dann ist $\cos u = 0$ und an den beiden ersten Komponenten von $\vec{r}$ lesen wir ab: Der Schnitt ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius a. Für $c \in (-b, b)$ existieren zwei Zahlen u_1 und u_2 mit $u_j \in [0, 2\pi)$ und $c = b \sin u_j$. Als Schnitt ergeben sich hier jeweils zwei konzentrische Kreise um den Ursprung.

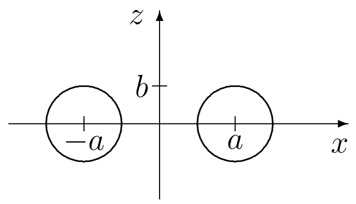
Nun schneiden wir die Menge T mit der xz-Ebene, setzen also $y = 0$. Dann folgt

$$(a + b \cos u) \sin v = 0\,;$$

wegen $a > b > 0$ bedeutet dies $\sin v = 0$, d. h. $v = 0$ oder $v = \pi$. Wegen

$$\vec{r}(u, 0) = \begin{pmatrix} a + b \cos u \\ 0 \\ b \sin u \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(u, \pi) = \begin{pmatrix} -(a + b \cos u) \\ 0 \\ b \sin u \end{pmatrix}$$

ergibt sich folgendes Bild:



Damit ist klar wie T aussieht: Die Menge entsteht, indem man die Kreise in der Skizze um die z-Achse rotieren lässt. (Man nennt T einen *Torus*.)

Jetzt wenden wir uns den Tangentialebenen zu. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Tangentialebene im Punkt $\vec{r}(u, v)$ aufgespannt wird von den Vektoren

$$D_1\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} -b \sin u \cos v \\ -b \sin u \sin v \\ b \cos u \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} -(a + b \cos u) \sin v \\ (a + b \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor dieser Tangentialebene ist dann

$$D_1\vec{r}(u, v) \times D_2\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} -b \cos u(a + b \cos u) \cos v \\ -b \cos u(a + b \cos u) \sin v \\ -b \sin u(a + b \cos u) \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialebene ist genau dann senkrecht zur xy-Ebene, wenn dieser Normalenvektor in der xy-Ebene liegt, wenn er also die z-Komponente 0 hat. Dies bedeutet $\sin u = 0$, also $u = 0$ oder $u = \pi$. Wegen

$$\vec{r}(0, v) = \begin{pmatrix} (a + b) \cos v \\ (a + b) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(\pi, v) = \begin{pmatrix} (a - b) \cos v \\ (a - b) \sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

sind dies gerade zwei Kreise um den Ursprung mit den Radien $a \pm b$ in der xy-Ebene.

Orthogonalität zur xz-Ebene liegt vor, wenn die y-Komponente des Normalenvektors verschwindet, wenn also $\cos u \sin v = 0$ ist. Dies ist zum einen für $\sin v = 0$ der Fall (das ist der von oben bekannte Schnitt mit der xz-Ebene) und zum anderen für $\cos u = 0$. Letzteres bedeutet $u = \frac{\pi}{2}$ oder $u = \frac{3\pi}{2}$. Es gilt

$$\vec{r}(\tfrac{\pi}{2}, v) = \begin{pmatrix} a\cos v \\ a\sin v \\ b \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(\tfrac{3\pi}{2}, v) = \begin{pmatrix} a\cos v \\ a\sin v \\ -b \end{pmatrix}.$$

Dies sind Kreise um den Ursprung mit Radius a, die in den Ebenen $z = \pm b$ liegen.

Aufgabe 2 **a)** Die Funktionen u und v sind jeweils auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert; die Funktion f dagegen nur auf $\{\,(u,v) : |u| \neq |v|\,\}$. Folglich ist $h(x,y)$ genau für die (x,y) definiert, für die $|u(x,y)| \neq |v(x,y)|$ gilt. Dies bedeutet

$$e^{-x-y} \neq e^{xy}, \qquad \text{also} \qquad -x-y \neq xy\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$-x \neq (1+x)y\,, \qquad \text{d. h.} \qquad x = -1 \quad \text{oder} \quad \left(x \neq -1 \quad \text{und} \quad y \neq -\frac{x}{1+x}\right).$$

Der Definitionsbereich der Funktion f ist somit

$$\Big\{\,(-1,y) : y \in \mathbb{R}\,\Big\} \cup \Big\{\,(x,y) : x \neq -1,\ y \neq -\frac{x}{1+x}\,\Big\}.$$

b) Wegen $h = f \circ \vec{g}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x-y} \\ e^{x}y \end{pmatrix}$$

gilt gemäß Kettenregel die Gleichung

$$h'(x,y) = f'(\vec{g}(x,y))\,\vec{g}\,'(x,y)\,.$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen von f und erhalten

$$D_1 f(u,v) = \frac{2u(u^2-v^2) - (u^2+v^2)2u}{(u^2-v^2)^2} = \frac{-4uv^2}{(u^2-v^2)^2}\,,$$
$$D_2 f(u,v) = \frac{2v(u^2-v^2) - (u^2+v^2)(-2v)}{(u^2-v^2)^2} = \frac{4u^2v}{(u^2-v^2)^2}\,.$$

Damit haben wir

$$f'(u,v) = \frac{4uv}{(u^2-v^2)^2}\begin{pmatrix} -v & u \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von $\vec{g}$ ist

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} -e^{-x-y} & -e^{-x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

Folglich erhalten wir

$$
\begin{aligned}
h'(x,y) &= f'(e^{-x-y}, e^{xy})\vec{g}\,'(x,y) \\
&= \frac{4e^{-x-y}e^{xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \begin{pmatrix} -e^{xy} & e^{-x-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-x-y} & -e^{-x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4e^{-x-y}e^{xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \begin{pmatrix} e^{xy}e^{-x-y} + e^{-x-y}ye^{xy} & e^{xy}e^{-x-y} + e^{-x-y}xe^{xy} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4e^{-x-y}e^{xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} e^{xy}e^{-x-y} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \end{pmatrix} = \frac{4e^{-2(x+y)}e^{2xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

c) Nach Definition ist

$$
h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{e^{-2(x+y)} + e^{2xy}}{e^{-2(x+y)} - e^{2xy}} = 1 + \frac{2e^{2xy}}{e^{-2(x+y)} - e^{2xy}}.
$$

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
D_1 h(x,y) &= \frac{4ye^{2xy}(e^{-2(x+y)} - e^{2xy}) - 2e^{2xy}(-2e^{-2(x+y)} - 2ye^{2xy})}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \\
&= \frac{4(y+1)e^{2xy}e^{-2(x+y)}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2},
\end{aligned}
$$

und genauso

$$
D_2 h(x,y) = \frac{4(x+1)e^{2xy}e^{-2(x+y)}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2}.
$$

Aufgabe 3 Das Taylorpolynom zweiten Grades um den Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$
T_2(f;\vec{x}_0)(\vec{x}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)^T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0).
$$

Bei dieser Funktion ergibt sich

$$
f_x(x,y,z) = e^z, \qquad f_y(x,y,z) = -2y, \qquad f_z(x,y,z) = xe^z.
$$

Damit erhalten wir $f_x(1,-1,0) = 1$, $f_y(1,-1,0) = 2$ und $f_z(1,-1,0) = 1$. Weiter gilt

$$
f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{xz} = e^z, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = xe^z.
$$

Insgesamt ergibt sich, mit $\vec{x}_0 := (x_0, y_0, z_0) := (1,-1,0)$,

$$
f(\vec{x}_0) = 0, \qquad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
T_2(f;\vec{x}_0)(x,y,z) &= 0 + (x - x_0) + 2(y - y_0) + (z - z_0) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\big(-2(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 2(x-x_0)(z-z_0)\big) \\
&= (x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 Gesucht ist

$$T_2(f;\vec{x}_0)(\vec{x}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)^T(\vec{x}-\vec{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)\,.$$

Wir bestimmen zunächst einige partiellen Ableitungen:

$$f_x = \frac{y}{1+(xy)^2}\,, \quad f_{xx} = \frac{-2xy^3}{(1+(xy)^2)^2}\,, \quad f_{xy} = \frac{(1+x^2y^2)-2x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2}\,.$$

Also ist $f_x(1,1)=\frac{1}{2}$, $f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{2}$ und $f_{xy}(1,1)=0$. Wegen $f(x,y)=f(y,x)$ ergibt sich dann auch $f_y(1,1)=\frac{1}{2}$ und $f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{2}$. Beachten wir $f(1,1)=\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, so erhalten wir das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_2(f;(1,1))(x,y) &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2\cdot 0\cdot(x-1)(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2\big) \\ &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) - \tfrac{1}{4}(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}(y-1)^2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Wir untersuchen zunächst das Innere von B. Wir suchen (x,y) mit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y-6 \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile folgt $x=-2y$ und damit aus der ersten $-3y-6=0$. Also ist $y=-2$ und $x=4$. Wegen $f_{xx}=2$, $f_{xy}=1$ und $f_{yy}=2$ ist die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

stets positiv definit ($2>0$ und Determinante >0); in $(4,-2)$ liegt daher ein lokales Minimum mit Wert $f(4,-2)=-10$ vor.

Wir kommen jetzt zum Rand der Menge B; dieser lässt sich parametrisieren in der Form $(x,y)=(6\cos t, 6\sin t)$, mit $t\in[0,2\pi)$. Wir betrachten daher die Funktion

$$\begin{aligned} h(t) := f(6\cos t, 6\sin t) &= 36\cos^2 t + 36\cos t\sin t + 36\sin^2 t - 36\cos t + 2 \\ &= 38 + 36\cos t(\sin t - 1) \end{aligned}$$

und untersuchen diese Funktion auf Extremstellen. Es gilt

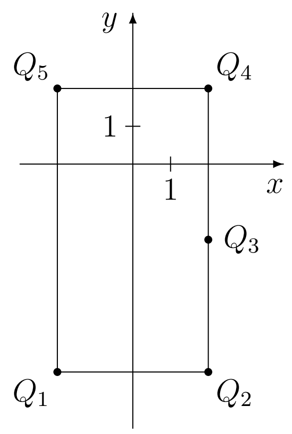
$$\begin{aligned} h'(t) &= -36\sin t(\sin t-1) + 36\cos t\cos t = 36(-\sin^2 t + \sin t + \cos^2 t) \\ &= 36(-2\sin^2 t + \sin t + 1) = -72(\sin^2 t - \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2})\,. \end{aligned}$$

Aus $h'(t)=0$ ergibt sich also mit der Substitution $u=\sin t$ die Gleichung $u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$ mit den Lösungen $u_{1,2} = \frac{1}{4}\pm(\frac{1}{16}+\frac{1}{2})^{1/2}$. Es folgt: $\sin t = -\frac{1}{2}$ oder $\sin t = 1$. Dies liefert $t_1 = \frac{7}{6}\pi$, $t_2 = \frac{11}{6}\pi$ und $t_3=\frac{\pi}{2}$ als verdächtige Stellen.

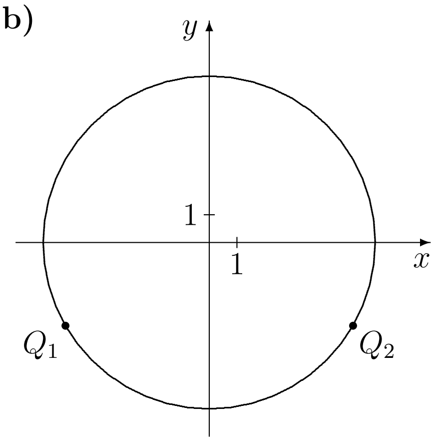
An der Stelle t_3 hat h' keinen Vorzeichenwechsel, denn es ist stets $\sin t\le 1$; also besitzt h hier kein Extremum.

An den beiden anderen Stellen dagegen wechselt h' das Vorzeichen: In t_1 wechselt $\sin t$ von Werten $>-\frac{1}{2}$ zu Werten $<-\frac{1}{2}$; damit wechselt dort $u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$ (mit $u=\sin t$) von $-$ nach $+$, d. h. h' wechselt von $+$ nach $-$; hier liegt also ein Maximum vor.

zu **a)**



zu **b)**



Genauso sieht man: Bei t_2 befindet sich ein Minimum.

Damit haben wir die zwei verdächtigen Randpunkte $Q_j = (6\cos(t_j), 6\sin(t_j))$, also

$$Q_1 = (-3\sqrt{3}, -3) \quad \text{(mögl. Max.)} \qquad \text{und} \qquad Q_2 = (3\sqrt{3}, -3) \quad \text{(mögl. Min.)}\,.$$

Betrachten wir die dortigen Gradienten: $\nabla f(-3\sqrt{3}, -3) = (-9 - 6\sqrt{3}, -6 - 3\sqrt{3}\,)$ und $\nabla f(3\sqrt{3}, -3) = (-9 + 6\sqrt{3}, -6 + 3\sqrt{3}\,)$ weisen jeweils nach außen. Also: In Q_1 hat f ein Randmaximum (mit Wert $38 + 12\sqrt{3}\,$), in Q_2 dagegen kein Extremum.

Aufgabe 6 Zuerst suchen wir im Inneren von B nach Extrema. Die Forderung

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt wegen der zweiten Komponente auf $y = -x$ und damit wegen der ersten Komponente auf $3x^2 - 2x - 1 = 0$, d. h. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm (\frac{1}{9} + \frac{1}{3})^{1/2}$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Die beiden stationären Stellen $(1, -1)$ und $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, die wir gefunden haben, liegen im Inneren von B. Wir untersuchen jetzt noch die Hessematrix: Wegen

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist $H_f(1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist positiv definit (wegen $6 > 0$ und positiver Determinante), in $(1, -1)$ ist also ein lokales Minimum mit Wert $f(1, -1) = -1$. Die Matrix $H_f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ist indefinit (denn ihre Determinante ist negativ), d. h. an dieser Stelle liegt kein Extremum vor.

Nach dem Inneren von B müssen wir jetzt noch den Rand untersuchen:

Für den unteren Rand von B betrachten wir $g_1(x) := f(x, -\frac{11}{2}) = x^3 - 12x + \frac{121}{4}$. Es gilt $g_1'(x) = 3x^2 - 12 < 0$ auf $(-2, 2)$, d. h. g_1 ist monoton fallend. Die Funktion g_1 hat daher ein Maximum in $x = -2$ und ein Minimum in $x = 2$. Somit ist $Q_1 := (-2, -\frac{11}{2})$ mögliche Maximalstelle von f und $Q_2 := (2, -\frac{11}{2})$ ist mögliche Minimalstelle.

Rechter Rand: $g_2(y) := f(2, y) = y^2 + 4y + 6 = (y + 2)^2 + 2$ hat auf $[-\frac{11}{2}, 2]$ drei Extrema: Ein Minimum bei $y = -2$ und Maxima bei $y = -\frac{11}{2}$ und bei $y = 2$. Folglich ist $Q_3 := (2, -2)$ mögliche Minimalstelle von f; die Punkte Q_2 und $Q_4 := (2, 2)$ sind mögliche Maximalstellen.

Oberer Rand: Für $g_3(x) := f(x,2) = x^3 + 3x + 4$ gilt $g_3'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Damit ist $Q_5 := (-2,2)$ mögliche Minimalstelle und Q_4 mögliche Maximalstelle von f.

Linker Rand: $g_4(y) := f(-2,y) = y^2 - 4y - 6 = (y-2)^2 - 10$. Die Funktion besitzt auf $[-\frac{11}{2}, 2]$ zwei Extrema: Ein Maximum bei $y = -\frac{11}{2}$ und ein Minimum bei $y = 2$. Damit ist Q_1 mögliche Maximalstelle und Q_5 mögliche Minimalstelle von f.

Wir betrachten nun der Reihe nach die verdächtigen Stellen:

Am einfachsten ist Q_3 zu behandeln, da hier der Rand von B glatt ist. In diesem Punkt zeigt der Gradient $\nabla f(2,-2) = (7,0)$ nach außen; zusammen mit der Tatsache, dass in Q_3 ein Minimum der Randfunktion g_2 vorliegt, folgt: In Q_3 besitzt f kein Extremum.

Auch der Punkt Q_2 ist leicht: Auf dem unteren Rand fällt f zu Q_2 hin ab, auf dem rechten Rand steigt f zu Q_2 hin an. Folglich liegt auch hier kein Extremum vor.

Betrachten wir als nächstes Q_4. Hier ist $\nabla f(2,2) = (15,8)$. Da f stetig differenzierbar ist, gilt $f_x > 0$ und $f_y > 0$ in einer Umgebung U von $(2,2)$. Für $(x,y) \in B \cap U$ ist dann

$$\begin{aligned} f(2,2) - f(x,y) &= f(2,2) - f(x,2) + f(x,2) - f(x,y) \\ &= \int_x^2 f_x(\xi,2)\,d\xi + \int_y^2 f_y(x,\eta)\,d\eta \geq 0\,, \end{aligned}$$

d. h. in Q_4 hat f ein lokales Maximum mit Wert $f(2,2) = 18$.

Als nächstes betrachten wir Q_5. Hier haben wir $\nabla f(-2,2) = (15,0)$; folglich ist in einer Umgebung U von $(-2,2)$ stets $f_x > 0$ erfüllt. Wir erhalten für $(x,y) \in B \cap U$

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(-2,2) &= f(x,y) - f(-2,y) + f(-2,y) - f(-2,2) \\ &= \int_{-2}^x f_x(\xi,y)\,d\xi + g_4(y) - g_4(2) \geq 0 \end{aligned}$$

(Beachte: g_4 ist monoton fallend), d. h. in Q_5 hat die Funktion f ein lokales Minimum mit Wert $f(-2,2) = -10$.

Es bleibt noch Q_1; hier gehen wir wie bei Q_5 vor: Wegen $\nabla f(-2,-\frac{11}{2}) = (0,-15)$ gibt es eine Umgebung U des Punktes, wo $f_y < 0$ gilt. Für $(x,y) \in B \cap U$ ist dann

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(-2,-\tfrac{11}{2}) &= f(x,y) - f(x,-\tfrac{11}{2}) + f(x,-\tfrac{11}{2}) - f(-2,-\tfrac{11}{2}) \\ &= \int_{-11/2}^y f_y(x,\eta)\,d\eta + g_1(x) - g_1(-2) \leq 0\,, \end{aligned}$$

denn g_1 fällt monoton. Damit folgt: Die Funktion f hat in Q_1 ein relatives Maximum mit Wert $f(-2,-\frac{11}{2}) = \frac{185}{4}$.

Aufgabe 7 **a)** Der Satz über die inverse Funktion liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion $\vec{g}$ muss stetig differenzierbar sein, es muss $\vec{g}(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ gelten, und die Matrix $\vec{g}\,'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ muss invertierbar sein. Überprüfen wir diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$\vec{g}(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$\vec{g}\,'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Satz über die inverse Funktion gilt

$$\big(\vec{g}^{-1}\big)'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(\vec{g}\,'(\vec{g}^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(\vec{g}\,'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion $\vec{g}$ ist überall stetig differenzierbar und für alle (x, y) ist

$$\det \vec{g}\,'(x,y) = (\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x \cos y = 0$ und $\cosh x \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $\vec{g}\,'(x, y)$ stets regulär. Der Satz über die inverse Funktion liefert nun die lokale Invertierbarkeit.

Die Funktion $\vec{g}$ ist aber nicht injektiv, denn $\vec{g}(x, y + 2\pi) = \vec{g}(x, y)$.

Aufgabe 8 **a)** Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0, 0, 1, 1)$ durch die Gleichung

$$\vec{f}(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad \vec{f}(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $\vec{f}$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $\vec{f}(0, 0, 1, 1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\partial_{(u,v)}\vec{f}(0, 0, 1, 1)$ regulär ist. Wegen

$$\vec{f}\,'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_{(u,v)}\vec{f}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

gilt $\partial_{(u,v)}\vec{f}(0, 0, 1, 1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, und diese Matrix ist tatsächlich regulär.

b) Bilden wir in beiden Gleichungen die partielle Ableitung nach x, wobei wir u und v jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,. \tag{$*$}$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0, 0) = v_x(0, 0) = 0$.

Aufgabe 1 f ist eine stetige Funktion und hat somit auf der abgeschlossenen Menge B sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum.
Wir betrachten zuerst alle Punkte im Innern von B, in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in (0,1)$.
(Also $x = y = z = 0$ nicht vergessen!) Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2-1)x \\ (z^2-1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2 + z^3 - z \end{pmatrix}.$$

Die ersten Zeilen sind genau für $x = y = 0$ erfüllt (da $|z| < 1$); mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit gilt die dritte Zeile genau für $z = 0$ oder $z = \pm 1/\sqrt{3}$. Wir müssen im inneren also die Fälle $x = 0$, $y = 0$ und $z \in \{0, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ ausprobieren ($x = y = z = 0$ eh, da dort f nicht differenzierbar ist!):

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand von B zu berechnen. Dort gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und damit $f(x,y,z) = (z^2 - 1) =: g(z)$ mit $z \in [-1, +1]$. Wir sehen sofort, dass das für $|z| = 1$ die Funktion g ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Damit ist -1 das Minimum von f auf B und 0 das Maximum.

Ohne die Vereinfachung, könnten wir auf dem Rand von B auch wie folgt rechnen:
Wir suchen die Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Setzen wir also $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ so lautet die Nebenbedinung $g = 0$. Beide Funktionen f und g sind differenzierbar (außer in $\vec{0}$, aber das ist ja weit weg). Weiter gilt $\nabla g(x,y,z) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, damit ist ∇g linear unabhängig (außer in $\vec{0}$). Setzen wir $h(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$ so gibt es nach dem Satz von Lagrange, für alle Stellen $\vec{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, in denen f einen Extremwert auf dem Rand von B annimmt, ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla h(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda g_x \\ f_y + \lambda g_y \\ f_z + \lambda g_z \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z^2-1)x/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda x \\ (z^2-1)y/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda y \\ 2z\|\vec{v}_0\| + (z^3 - z)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile ist erfüllt für $z = 0$ (in f einsetzen, hier finden wir das Minimum -1) oder für $z \neq 0$ und $2\|\vec{v}_0\| + (z^2 - 1)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda = 0$.
Aus der letzten Zeile erhalten wir $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, was auch bedeutet $\|\vec{v}_0\| = 1$.
Zeile drei für $z \neq 0$ liefert $2\lambda = x^2 + y^2 - 2$. Einsetzen...
Offensichtlich ist dieser Weg mühsamer.

Aufgabe 2 Wir setzen $g(x,y,z) := a/x + b/y + c/z - 1$ und suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Die Funktionen f und g sind stetig differenzierbar, und für alle $(x,y,z) \in (0,\infty)^3$ ist

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -a/x^2 \\ -b/y^2 \\ -c/z^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig. (*Ein* Vektor ist linear unabhängig, wenn er $\neq \vec{0}$ ist.) Aus dem Satz von Lagrange ergibt sich nun: Setzt man

$$h(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)\,,$$

und ist (x_0,y_0,z_0) eine lokale Extremalstelle der Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$, so existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla h(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) = \vec{0}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla h(x,y,z,\lambda) = \vec{0} &\iff (\, f_x + \lambda g_x,\ f_y + \lambda g_y,\ f_z + \lambda g_z,\ g\,) = (0,0,0,0) \\
&\iff 1 - \frac{\lambda a}{x^2} = 0\,, \quad 1 - \frac{\lambda b}{y^2} = 0\,, \quad 1 - \frac{\lambda c}{z^2} = 0\,, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1 = 0 \\
&\iff \lambda \geq 0\,, \quad x = \sqrt{\lambda a}\,, \quad y = \sqrt{\lambda b}\,, \quad z = \sqrt{\lambda c}\,, \quad \frac{a}{\sqrt{\lambda a}} + \frac{b}{\sqrt{\lambda b}} + \frac{c}{\sqrt{\lambda c}} = 1 \\
&\iff \lambda \geq 0\,, \quad x = \sqrt{\lambda a}\,, \quad y = \sqrt{\lambda b}\,, \quad z = \sqrt{\lambda c}\,, \quad \sqrt{\lambda} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}
\end{aligned}$$

Somit ist die einzige Stelle, an der f ein Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ besitzen könnte,

$$(x_0,y_0,z_0) := (\sqrt{\lambda_0 a}, \sqrt{\lambda_0 b}, \sqrt{\lambda_0 c}\,) \quad \text{mit} \quad \lambda_0 := \big(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,\big)^2\,.$$

Es gilt $f(x_0,y_0,z_0) = \sqrt{\lambda_0 a} + \sqrt{\lambda_0 b} + \sqrt{\lambda_0 c} = \sqrt{\lambda_0}\big(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,\big) = \lambda_0$.

Wir wollen nun noch beweisen, dass für $T := \{\, (x,y,z) \in (0,\infty)^3 \mid g(x,y,z) = 0 \,\}$

$$\min\{\, f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in T \,\} = \lambda_0$$

gilt, dass also insbesondere dieses Minimum existiert. Es sei $(x,y,z) \in T$. Gilt $x > \lambda_0$ oder $y > \lambda_0$ oder $z > \lambda_0$, so folgt $f(x,y,z) > \lambda_0 = f(x_0,y_0,z_0)$. Andernfalls ist

$$(x,y,z) \in K := \{\, (x,y,z) \in T \mid x \leq \lambda_0,\ y \leq \lambda_0,\ z \leq \lambda_0 \,\}\,.$$

Für $(x,y,z) \in T$ gilt $x,y,z > 0$ und $a/x + b/y + c/z = 1$. Hieraus folgen sofort die Ungleichungen $x \geq a$, $y \geq b$ und $z \geq c$. Also ist

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,\lambda_0],\ y \in [b,\lambda_0],\ z \in [c,\lambda_0],\ g(x,y,z) = 0 \,\}$$

eine beschränkte und abgeschlossene Menge (Beachte: g ist stetig). Sie ist nicht leer, denn $(x_0,y_0,z_0) \in K$; also nimmt die stetige Funktion f auf K ihr Minimum an. Wegen $f(x,y,z) > f(x_0,y_0,z_0)$ auf $T \setminus K$ nimmt f somit auch auf T ihr Minimum an. Die einzige verdächtige Stelle ist (x_0,y_0,z_0), daher ist $f(x_0,y_0,z_0) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,)^2$ das gesuchte Minimum.

Aufgabe 3 Da die Menge B offenbar beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert.

Gesucht sind Extrema von f unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) := x+y+z = 0 \qquad \text{und} \qquad g_2(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 = 0\,.$$

Wie bestimmen alle verdächtigen Stellen: Dies sind zunächst diejenigen (x,y,z) für die

$$\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,1) \qquad \text{und} \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (2x,2y,2z)$$

linear abhängig sind. Dies bedeutet $x=y=z$; solche Punkte können jedoch nicht die Nebenbedingungen erfüllen, denn aus $x+y+z=0$ folgte dann $x=y=z=0$ und damit wäre $x^2+y^2+z^2=1$ nicht erfüllt. Also erhalten wir sämtliche verdächtigen Stellen durch Anwenden des Satzes von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} h(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= 5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-1)\,, \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla h = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$\begin{gathered} 5+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1+\lambda_1+2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3+\lambda_1+2\lambda_2 z = 0\,, \\ x+y+z = 0\,, \qquad x^2+y^2+z^2-1 = 0\,. \end{gathered}$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3+3\lambda_1+2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

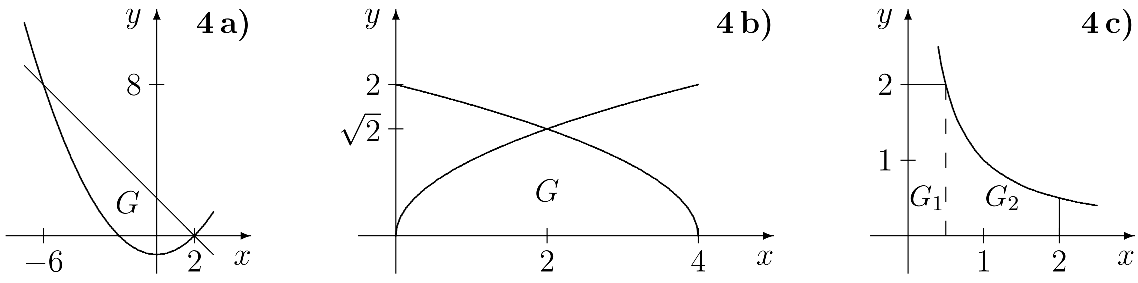
wegen $x+y+z=0$ also $\lambda_1=-1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4+2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y=0$ folgt. Aus $x+y+z=0$ ergibt sich dann $z=-x$ und in $x^2+y^2+z^2=1$ eingesetzt folgt $2x^2=1$, also $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $\pm 4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge B das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 4 **a)** Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y=\frac{1}{4}x^2-1$ und $y=2-x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2-1=2-x$, also $x^2+4x-12=0$ bestimmen. Dies sind $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+12}$, d. h. $x_1=-6$ und $x_2=2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt $I(G)=\iint\limits_G d(x,y)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I(G) &= \int_{x=-6}^{2}\int_{y=x^2/4-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^{2}\big((2-x)-(\tfrac{1}{4}x^2-1)\big)\,dx = \int_{-6}^{2}(-\tfrac{1}{4}x^2-x+3)\,dx \\ &= -\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+3x\,\Big|_{x=-6}^{2} = -\tfrac{2}{3}-2+6-(18-18-18) = \tfrac{64}{3}\,. \end{aligned}$$



b) Auch hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze).

$$I(G) = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4 - y^2) - y^2\big)\, dy = 4y - \tfrac{2}{3}y^3 \,\Big|_{y=0}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$

c) Wir untersuchen die letzte Bedingung genauer: $(2 - x)(2 - y) > 0$ ist erfüllt, wenn $x < 2$ und $y < 2$ gilt, oder aber, wenn $x > 2$ und $y > 2$ gilt. Im Falle $x > 2$ und $y > 2$ kann jedoch $xy < 1$ nicht erfüllt sein, also können wir $(2-x)(2-y) > 0$ in der Definition von G ersetzen durch $x, y < 2$.

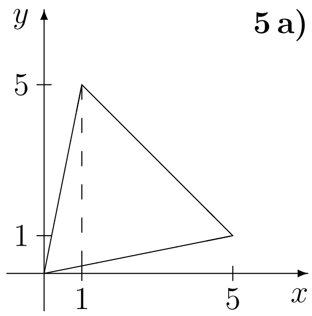
Wir unterteilen G in zwei Gebiete G_1 und G_2 (siehe Skizze). Dann ist

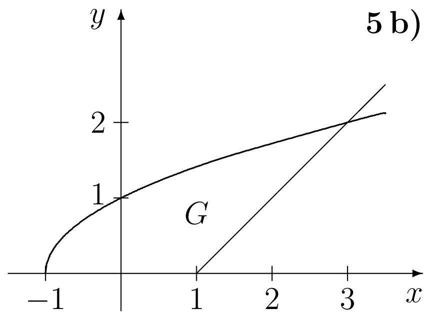
$$I(G) = I(G_1) + I(G_2) = \int_0^{1/2} 2\, dx + \int_{1/2}^2 \frac{1}{x}\, dx = 1 + \ln x \,\Big|_{x=1/2}^{2} = 1 + \ln 2 - \ln \tfrac{1}{2} = 1 + 2\ln 2\,.$$

Aufgabe 5 **a)** Um diese Integral zu berechnen, unterteilen wir das Dreieck gemäß der Skizze in zwei Teilgebiete; das linke nennen wir G_1, das rechte G_2. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G (y + x^2)\, d(x,y) &= \iint\limits_{G_1} (y + x^2)\, d(x,y) + \iint\limits_{G_2} (y + x^2)\, d(x,y) \\
&= \int_{x=0}^1 \int_{y=x/5}^{5x} (y + x^2)\, dy\, dx + \int_{x=1}^5 \int_{y=x/5}^{6-x} (y + x^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^1 (\tfrac{1}{2}y^2 + x^2 y)\big|_{y=x/5}^{5x}\, dx + \int_{x=1}^5 (\tfrac{1}{2}y^2 + x^2 y)\big|_{y=x/5}^{6-x}\, dx \\
&= \int_0^1 (\tfrac{25}{2}x^2 + 5x^3 - \tfrac{1}{50}x^2 - \tfrac{1}{5}x^3)\, dx \\
&\qquad + \int_1^5 \big(\tfrac{1}{2}(36 - 12x + x^2) + x^2(6 - x) - \tfrac{1}{50}x^2 - \tfrac{1}{5}x^3\big)\, dx \\
&= \int_0^1 (\tfrac{312}{25}x^2 + \tfrac{24}{5}x^3)\, dx + \int_1^5 (-\tfrac{6}{5}x^3 + \tfrac{162}{25}x^2 - 6x + 18)\, dx \\
&= (\tfrac{104}{25}x^3 + \tfrac{6}{5}x^4)\big|_{x=0}^1 + (-\tfrac{3}{10}x^4 + \tfrac{54}{25}x^3 - 3x^2 + 18x)\big|_{x=1}^5 = \tfrac{134}{25} + \tfrac{2016}{25} = 86\,.
\end{aligned}$$

b) Das Gebiet liegt zwischen den Kurven $x = y + 1$ und $x = y^2 - 1$. Untersuchen wir, wo sich diese Kurven schneiden, so führt dies zu der Gleichung $y^2 - y - 2 = 0$ mit den





Lösungen $y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4} + 2)^{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, also $y_1 = -1$ und $y_2 = 2$ (vgl. Skizze). Also:

$$\iint_G \cosh \frac{x}{y+1}\, d(x,y) = \int_{y=0}^{2} \int_{x=y^2-1}^{y+1} \cosh \frac{x}{y+1}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} (y+1) \sinh \frac{x}{y+1} \Big|_{x=y^2-1}^{y+1} dy = \int_0^2 \big((y+1)\sinh 1 - (y+1)\sinh(y-1)\big)\, dy\,.$$

Es ist

$$\int_0^2 (y+1) \sinh 1\, dy = \tfrac{1}{2}(y+1)^2 \sinh 1 \Big|_{y=0}^{2} = 4 \sinh 1\,,$$

und mit Produktintegration erhält man

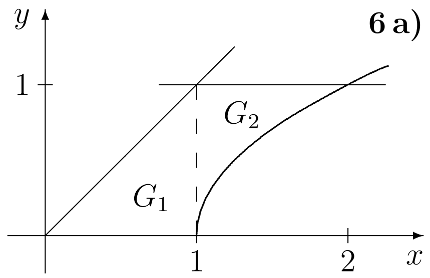
$$\begin{aligned}\int_0^2 (y+1)\sinh(y-1)\, dy &= (y+1)\cosh(y-1) \Big|_{y=0}^{2} - \int_0^2 \cosh(y-1)\, dy \\ &= 3\cosh 1 - \cosh(-1) - \big(\sinh(y-1)\big) \Big|_{y=0}^{2} \\ &= 2\cosh 1 - \sinh 1 + \sinh(-1) = 2\cosh 1 - 2\sinh 1\,.\end{aligned}$$

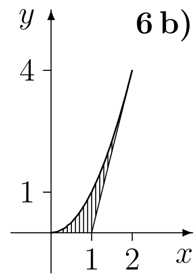
Insgesamt ergibt sich dann

$$\iint_G \cosh \frac{x}{y+1}\, d(x,y) = 4\sinh 1 - (2\cosh 1 - 2\sinh 1) = 6\sinh 1 - 2\cosh 1\,.$$

Aufgabe 6 **a)** Wir spalten das Gebiet in zwei Teile auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx\, dy &= \iint_{G_1} x^2 y\, d(x,y) + \iint_{G_2} x^2 y\, d(x,y) \\ &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x^2 y\, dy\, dx + \int_{x=1}^{2} \int_{y=\sqrt{x-1}}^{1} x^2 y\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=0}^{x} dx + \int_{x=1}^{2} \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=\sqrt{x-1}}^{1} dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4\, dx + \int_1^2 \big(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2(x-1)\big)\, dx \\ &= \tfrac{1}{10} x^5 \Big|_{x=0}^{1} + (-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3) \Big|_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{10} + (-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{67}{120}\,.\end{aligned}$$





b) Die Kurven $y = x^2$ und $y = 4x - 4$ schneiden sich im Punkt $(2, 4)$. Also gilt

$$\int_0^2 \int_{\max\{0,4x-4\}}^{x^2} 2xy\,dy\,dx = \int_{y=0}^4 \int_{x=\sqrt{y}}^{y/4+1} 2xy\,dx\,dy = \int_{y=0}^4 x^2 y \Big|_{x=\sqrt{y}}^{y/4+1} dy$$
$$= \int_0^4 \big((\tfrac{1}{4}y + 1)^2 y - y^2\big)\,dy = \int_0^4 (\tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 + y)\,dy = \tfrac{1}{64}y^4 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^4 = \tfrac{4}{3}\,.$$

Aufgabe 7 Die Parametrisierung $\vec{r}$ ist stetig differenzierbar; es gilt

$$\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)\,.$$

Folglich ergibt sich

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}\,.$$

Nach Definition des Linienintegrals ist dann

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2 + t^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\,dt = \tfrac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2} \Big|_{t=0}^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\big((2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.$$

Aufgabe 8 8

a) Definitionsgemäß ist

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\,dt = e^{\cos t} - \tfrac{1}{3}\cos^3 t \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0\,.$$

b) Auch hier brauchen wir nur die Definition des Linienintegrals:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t)\,dt$$
$$= \ln 2 + \tfrac{1}{2} \sinh^2 t \,\Big|_{t=0}^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2} \sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.$$

c) Die Kurve ist hier nur stückweise stetig differenzierbar; es ergibt sich

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt + \int_1^2 \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 \sin t\,dt + \int_1^2 \big(1 + (t-1)^2\big)\,dt$$
$$= -\cos t \,\Big|_{t=0}^{1} + \big(t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\big) \,\Big|_{t=1}^{2} = (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.$$