

Blatt 10

Tutorium HM 2

25. Juni 2009

*Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.*

1 Nachtrag - Flächenintegrale

Wir haben im letzten Tutorium gesehen, dass sich Flächen durch zwei Freiheitsgrade parametrisieren lassen. Exemplarisch waren das hier (u, v) . Ein Punkt auf der Oberfläche war gegeben durch $\vec{x}(u, v)$.

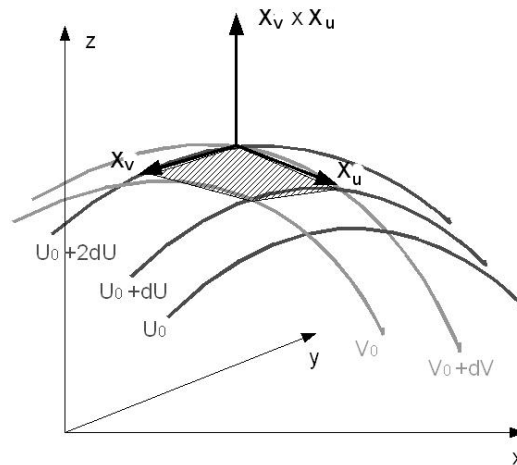


Abbildung 1:

Desweiteren haben wir gesehen, dass sich der Tangentialvektor an die Parameterlinie mit $v = \text{const}$ durch die partielle Differentiation nach dem freien Parameter u ergeben. Analoges galt für $u = \text{const}$. Wir hatten die beiden Tangentialvektoren

$$\vec{x}_u := \partial_u \vec{x}(u, v)$$

$$\vec{x}_v := \partial_v \vec{x}(u, v)$$

definiert.

Der infinitesimale Inhalt des in Abbildung 1 schraffierten Parallelogramms wird aufgespannt durch die infinitesimalen Vektoren $\Delta u \vec{x}_u$ und $\Delta v \vec{x}_v$ und ergibt sich zu:

$$\Delta\sigma = \Delta u \Delta v \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|$$

Daraus folgt nach Parametrisierung das Oberflächenintegral:

- Falls f eine skalare Funktion ist:

$$\int_F d\sigma f := \int_F d(u, v) \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| f(\vec{x}(u, v))$$

- Falls f eine Vektorfunktion ist:

$$\begin{aligned} \int_F d\vec{\sigma} \vec{f} &:= \int_F d(u, v) \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \underbrace{\frac{(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}}_{\text{Normalenvektor } \hat{n}} \cdot \vec{f}(\vec{x}(u, v)) \\ &= \int_F d(u, v) \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot \vec{f}(\vec{x}(u, v)) \end{aligned}$$

2 Divergenzsatz von Gauss

Sei G regulär. ∂G bestehe aus endlich vielen geschlossenen stückweise regulären orientierbaren Flächen. $\hat{n}$ sei der aus G herauszeigende Normalenvektor von ∂G . $\vec{v} \in C^1$ sei ein auf G definiertes Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_G dV \nabla \cdot \vec{v} = \oint_{\partial G} dF \hat{n} \cdot \vec{v}$$

Beweis (nur schematisch):

Ich betrachte ein Volumenelement $G \in \mathbb{R}^3$ und splitte dieses in N gleichgroße Würfel auf (siehe Abbildung 2).

Behauptung: Das Flächenintegral über das Vektorfeld $\vec{v}$ lässt sich schreiben als

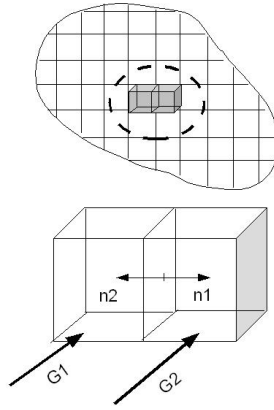


Abbildung 2: Satz von Gauss

$$\oint_{\partial G} dF \hat{n} \cdot \vec{v} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \underbrace{\int_{\partial G_j} dF_j \hat{n} \cdot \vec{v}}_{I_j}$$

, wobei I_j das Integral über einen Würfel ist. Das wird klar, wenn man bedenkt, dass sich die Beiträge angrenzender Flächen, wie im Schaubild gezeigt, gerade aufheben, da $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$. Übrig bleibt das Integral über die gesamte Oberfläche ∂G . Betrachte nun einen beliebigen Würfel mit Kantenlänge $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Das Integral I_1 wird dann zu

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G_1} dF_1 \hat{n} \cdot \vec{v} &= \int dy dz v_x(x_0 + \Delta x, y, z) - v_x(x_0, y, z) \\ &\quad + \int dx dz v_y(x, y_0 + \Delta y, z) - v_y(x, y_0, z) \\ &\quad + \int dx dy v_z(x, y, z_0 + \Delta z) - v_z(x, y, z_0) \\ &= \int dx dy dz \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_x(x_0 + \Delta x, y, z) - v_x(x_0, y, z)}{\Delta x} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \dots \\ &= \int dV \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \\ &= \int dV \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

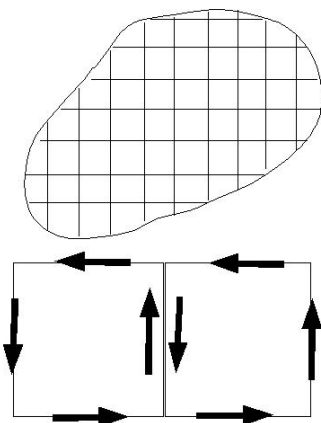


Abbildung 3: Satz von Stokes

3 Satz von Stokes

B sei orientierbare, stückweise reguläre Fläche mit überschneidfrier und geschlossener Randkurve ∂B , die so durchlaufen wird, dass B immer links liegt. $\hat{n}$ sei der Normalenvektor aus B und $\vec{v} \in C^1$ ein auf B definiertes Vektorfeld. Dann gilt:

$$\oint_{\partial B} d\vec{x} \cdot \vec{v} = \int_B dF \hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{v})$$

Der Beweis läuft analog zu oben. O.B.d.A. schauen wir uns eine Fläche B im $\mathbb{R}^2$ an und zerschneiden diese in Quadrate der Kantenlänge $\Delta x = \Delta y$.

Dann gilt wieder, da sich die Beiträge der Seitenkanten zweier Quadrate aufheben,

$$\oint_{\partial B} d\vec{r} \cdot \vec{v} = \sum_j \oint_{\partial B_j} d\vec{r} \cdot \vec{v}$$

,mit

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_1} d\vec{r} \cdot \vec{v} &= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx v_x(x, y_0) - v_x(x, y_0 + \Delta y) \\ &\quad + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} dy v_y(x_0 + \Delta x, y) - v_y(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} dy \frac{v_y(x_0 + \Delta x, y) - v_y(x_0, y)}{\Delta y} \\ &\quad - \frac{v_x(x, y_0) - v_x(x, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Summe und Grenzwertbildung $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ führt zu

$$\oint_{\partial B} d\vec{r} \cdot \vec{v} = \int \int_B dx dy \partial_x v_y - \partial_y v_x$$