

Blatt 11

Tutorium HM 2

30. Juni 2009

*Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.*

Dieses Übungsblatt behandelt die Laplacetransformation, eine wertvolle Methode zur Behandlung von Differentialgleichungen, die v.a. von den Elektrotechnikern genutzt wird. Zu Beginn dieser Hilfestellung will ich die Integraltransformationen motivieren, die im Laufe dieser VL auftauchen werden.

1 Motivation - Fourier- und Laplacetransformation

In dieser VL ist uns schon einmal eine Möglichkeit begegnet periodische Funktionen, die beschränkt sind, über eine Reihe darzustellen, die **Fourierreihe** (siehe Blatt 4). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische, beschränkte Funktion mit Periode T , d.h. $f(x) = f(t + T)$. Eine vollständige Basis, auf die wir projizieren können, ist gegeben durch $\xi_k(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \exp(i \frac{2\pi k}{T} t)$. Die Fourierreihe ergibt sich zu:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \xi_k(t)$$

mit den Koeffizienten

$$c_k = \langle \xi_k | f \rangle = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} dt \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T} t\right) \cdot f(t)$$

Wir können uns nun fragen, was passiert, wenn wir die Periode T immer größer machen bis schließlich zum Grenzübergang $T \rightarrow \infty$.

Was geschieht dabei mit der Fourierreihe:

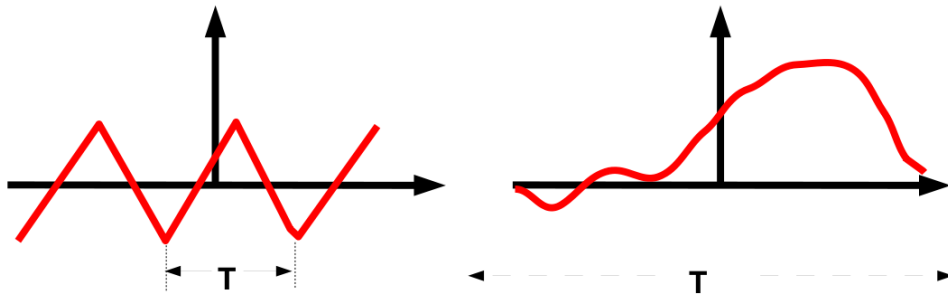


Abbildung 1: Grenzübergang

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} dt' \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}t'\right) \cdot f(t') \right) \exp\left(i\frac{2\pi k}{T}t\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left(\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} dt' \exp(-i\omega_k t') \cdot f(t') \right) \exp(i\omega_k t)
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir genutzt, dass $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$. Machen wir nun den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$, d.h. $\Delta\omega \rightarrow 0$, so wird die Summe zum Integral (Riemann):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp(-i\omega t') f(t') \right)}_{\hat{f}(\omega)} \exp(i\omega t)$$

Wir nennen $\hat{f}(\omega)$ die Fouriertransformierte der Funktion f . In obige Rücktransformation geht der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ ein, welchen wir durch obige Herleitung plausibel gemacht haben. Die Fouriertransformation wird euch im Laufe des Studiums immer wieder begegnen. Eine Anwendung wird sein, Differentialgleichungen auf algebraische Gleichungen zurückzuführen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 f(t) + m^2 f(t) &= \delta(t) \\
 \Rightarrow -\omega^2 \hat{f}(\omega) + m^2 \hat{f}(\omega) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{m^2 - \omega^2}
 \end{aligned}$$

Das können wir nun zurücktransformieren und erhalten die Lösung, die wir vom harmonischen Oszillator kennen:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{\exp(i\omega t)}{m^2 - \omega^2} \\
&= -\frac{2\pi i}{4\pi m} (\exp(imt) - \exp(-imt)) \\
&= \frac{1}{m} \sin(mt)
\end{aligned}$$

Wir halten zusammenfassend fest, dass sich eine Funktion f , die notwendigerweise im Unendlichen verschwindet (wir werden sehen, dass f mindestens $\in \mathbb{L}^1$ sein muss $\rightarrow$ siehe spätere VL), Fouriertransformieren lässt:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(-i\omega t)$$

Ist $f \in \mathbb{L}^2$, so ist dies auch $\hat{f}$ und es existiert eine Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t).$$

2 Laplacetransformation

Wir haben den Vorteil bei der Behandlung von DGL gesehen. Nun stellt sich die Frage, welche Transformation uns auf ähnliche Weise weiterhilft, wenn die Funktion f im Unendlichen nicht mehr gegen Null geht. Eine solche ist die Laplacetransformation $\mathcal{L}[f]$:

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} dt f(t) \exp(-st)$$

Diese Transformation hat folgende Eigenschaften:

- sie ist linear, d.h. mit $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[a f_1 + b f_2](s) = a \mathcal{L}[f_1] + b \mathcal{L}[f_2]$$

- damit das Integral konvergiert muss es ein s_0 und $M > 0$ geben mit $s_0 < s$, so dass $f(t) \leq M \exp(-s_0 t)$.
- die Lapacetransformierte einer Ableitung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] &= \int_0^{\infty} dt \frac{df}{dt} \exp(-st) \\
&= [f(t) \exp(-st)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} dt f(t) \exp(-st) \\
&= -f(0) + s \cdot \mathcal{L}[f](s)
\end{aligned}$$

für $s > 0$. Auf analoge Weise zeigt man

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 \mathcal{L}[f](s) - s f(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

und

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}.$$

Wir können somit also eine DGL n -ter Ordnung auf eine DGL $(n-1)$ -ter Ordnung zurückführen.

- Die LT eines Integrals liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t du f(u)\right] &= \int_0^\infty dt \exp(-st) \int_0^t du f(u) \\ &= \left[-\frac{1}{s} \exp(-st) \int_0^t du f(u)\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty dt \frac{1}{s} \exp(-st) f(t) \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[f] \end{aligned}$$

- es gilt das Verschiebungsgesetz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^\infty dt f(t) e^{at} e^{-st} \\ &= \mathcal{L}[f](s-a) \end{aligned}$$

notwendigerweise ist hier $s > a$.

- weitere Eigenschaften sind (ohne Beweis $\rightarrow$ siehe VL):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right) \\ \mathcal{L}[t^n f(t)] &= (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[f](s)}{ds^n} \\ \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] &= \int_s^\infty du \mathcal{L}[f](u) \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t du f(u) g(t-u)\right] &= \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s) \end{aligned}$$

Wie bei der Fouriertransformation können wir eine DGL auf eine algebraische Gleichung bringen und Rücktransformieren:

$$\frac{d}{dt}f(t) + \lambda f(t) = 0$$

mit $f(0) = f_0$. Unter Ausnutzung der Linearität der Laplace-Transformation und des Verhaltens bei Ableitung im Ursprungsbereich ist die Transformierte gegeben durch

$$\begin{aligned}(s \mathcal{L}[f](s) - f_0) + \lambda \mathcal{L}[f](s) &= 0 \\ \rightarrow \mathcal{L}[f](s) &= \frac{f_0}{s + \lambda}\end{aligned}$$

Die Rücktransformation führt uns auf eine Exponentialfunktion, was wir schon vorher erraten konnten

$$f(t) = f_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + \lambda} \right] = f_0 e^{-\lambda t}.$$