

Blatt 12

Tutorium HM 2

8. Juli 2009

*Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.*

Auf diesem Blatt begegnet uns nicht viel neues. In den einzelnen Teilaufgaben wendet ihr die aus der Schule bekannte Partialbruchzerlegung an (A3 und A4). Bei der A5 sollt ihr DGLs mithilfe von Laplacetransformation lösen. Wie das prinzipiell geht, haben wir im letztem Tutorium erfahren.

1 Polynomdivision

Ist x_0 eine Nullstelle eines Polynoms $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, d.h. ist die Gleichung $f(x_0) = 0$ erfüllt, so ist f durch den Linearfaktor $x - x_0$ teilbar in der Form, dass ein weiteres Polynom g existiert, mit dem wir schreiben können

$$f(x) = (x - x_0)g(x)$$

Danach kann ein Polynom n -ten Grades im reellen höchstens n Nullstellen haben. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes Polynom n -ten Grades in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, kann also in n Linearfaktoren zerlegt werden. Die *Schul*methode (kennt ihr aus der *Schule*) soll an einem Beispiel erläutert werden:

Es sei das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ gegeben.

- Zunächst muss eine Nullstelle geraten werden. Ist f ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, so ist jede ganzzahlige NS ein Teiler von a_0 . Ist außerdem $a_n = 1$ so ist jede rationale NS eine ganze Zahl und zwar ein Teiler von a_0 .
In unserem Fall ist eine NS leicht zu erkennen, nämlich $x_{NS} = -1$.

- Die *Schul*methode erfolgt dann nach folgendem Verfahren (zur Erinnerung):

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 - 3x - 3) : (x + 1) = x^2 - 3 \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 -3x - 3 \\
 \underline{-(-3x - 3)} \\
 0
 \end{array}$$

- Die Berechnung der anderen NS ist nun trivial.

2 Partialbruchzerlegung-Ansatz

Jede echtgebrochene (Grad des Zählers < Grad des Nenners) rationale Funktion lässt sich als Summe von Partialbrüchen schreiben, welche ihrerseits echt gebrochene rationale Funktionen der Form

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{c_1}{(x - x_0)}, \dots, \frac{c_k}{(x - x_0)^k} \\
 (2) \quad & \frac{a_1x + b_1}{(x^2 + px + q)}, \dots, \frac{a_kx + b_k}{(x^2 + px + q)^k}
 \end{aligned}$$

sind. Hier wurde angenommen, dass in (2) der quadratische Ausdruck im Nenner keine reellen Nullstellen hat. Ansonsten könnten wir den Bruch zerlegen wie in (1). Eine Alternative wäre eine Zerlegung in Partialbrüche wie in (1) mit $x_0 \in \mathbb{C}$. Das geht immer.

Beispiel zu (2): $f(x) = \frac{1}{x^2(2+x^2)^2}$

Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(2+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{2+x^2} + \frac{ex + f}{(2+x^2)^2}$$

Wie wir sehen, stehen die Potenzfunktionen x^2 und $2+x^2$ jeweils im Quadrat. Nach (2) ist also $k=2$ und danach die Ansätze gewählt. Der rechte Ausdruck muss jetzt nur noch auf den Hauptnenner gebracht

$$f(x) = \frac{ax(2+x^2)^2 + b(2+x^2)^2 + (cx^3 + dx^2)(2+x^2) + ex^3 + fx^2}{x^2(2+x^2)^2}$$

und im Zähler die Koeffizienten nach Potenzen x^n sortiert werden. Ein Koeffizientenvergleich der linken und rechten Seite liefert uns dann Werte für a, b, c, d, e und f. Da ich noch eine weitere Methode erwähnen will, bleibt die weitere Rechnung euch überlassen.

Und zwar handelt es sich dabei um die sogenannte *Grenzwertmethode*. Nur in dem Fall,

dass sich der Nenner in Linearfaktoren schreiben lässt, ...
Beispiel:

$$\frac{3}{x^2 + 5x + 4} = \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}$$

...könnt ihr eine einfache Grenzwertbetrachtung machen. Für $x \rightarrow -1$ muss sich die linke Seite wie der erste Bruch auf der rechten Seite verhalten. Für $x \rightarrow -4$ äquivalent. Nehmen wir diese Erkenntnis, so bestimmen sich die Koeffizienten a und b gerade durch die Grenzwerte

$$a = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{3}{(x+1)(x+4)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -4} (x+4) \frac{3}{(x+1)(x+4)} = -1$$

3 Lösen von DGL mit Laplacetransformation

In A5 begegnet ihr linearen DGL n-ter Ordnung mit inhomogenen rechten Seiten.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 = f(t)$$

Mithilfe der Laplacetransformation können wir diese DGL zurückführen auf eine algebraische Gleichung, denn

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n y}{dt^n} \right] (s) = s^n \mathcal{L}[y] - s^{n-1}y(0) - s^{n-2} \frac{dy}{dt}(0) - \dots - \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0).$$

Beispiele:

1. Löse die DGL

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Verfahren: Laplacetransformation (sei $\bar{y}(s) = \mathcal{L}[y](s)$), Partialbruchzerlegung, Rücktransformation ($\rightarrow$ Tabellenwerk).

$$\begin{aligned}
s^2 \bar{y}(s) - s y(0) - y'(0) - 3[s \bar{y} - y(0)] + 2 \bar{y}(s) &= \frac{2}{s+1} \\
(s^2 - 3s + 2) \bar{y}(s) - 2s + 5 &= \frac{2}{s+1} \\
\bar{y}(s) &= \frac{2s^2 - 3s - 3}{(s+1)(s-1)(s-2)} \\
&= \frac{1}{3(s+1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{3(s-2)}
\end{aligned}$$

Die Rücktransformierten kennen wir schon aus dem letzten Tutorium. Es ist:

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + 2e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$$

2. Wir haben zwei elektrische Schaltkreise und wollen diese koppeln (ebenso könnt ihr euch ein gekoppeltes Federpendel vorstellen oder zwei Atome, die ein Molekül bilden). Beide bestehen aus einer Spule mit Eigeninduktivität L und einer Kapazität C . Die Kopplung geschieht über einen Eisenkern. Die Gegeninduktivität sei M . Sei q_1 die Ladung des Kondensators 1, q_2 die von Kondensator 2. Die Anfangsbedingungen seien $q_1(t=0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ und $q_2(0) = CU_0$. Der Kondensator sei also zur Zeit $t=0$ voll aufgeladen. Nach der Maschenregel und Abbildung 1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_1 &= 0 \\
M\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 &= 0
\end{aligned}$$

Eine Laplacetransformation liefert:

$$\begin{aligned}
(Ls^2 + \frac{1}{C})\bar{q}_1 + Ms^2\bar{q}_2 &= sMU_0C \\
Ms^2\bar{q}_1 + (Ls^2 + \frac{1}{C})\bar{q}_2 &= sLU_0C
\end{aligned}$$

Eliminieren wir $\bar{q}_2$ aus den Gleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1(s) &= \frac{MU_0s}{[(L+M)s^2 + \frac{1}{C}][(L-M)s^2 + \frac{1}{C}]} \\
&= \frac{U_0C}{2} \left[\frac{(L+M)s}{(L+M)s^2 + \frac{1}{C}} - \frac{(L-M)s}{(L-M)s^2 + \frac{1}{C}} \right]
\end{aligned}$$

Mit dem Wissen, dass $\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ erhalten wir

$$q_1(t) = \frac{1}{2}U_0C(\cos(\omega_1t) - \cos(\omega_2t)),$$

mit $\omega_1^2 = \frac{1}{C(L+M)}$ und $\omega_2^2 = \frac{1}{C(L-M)}$.

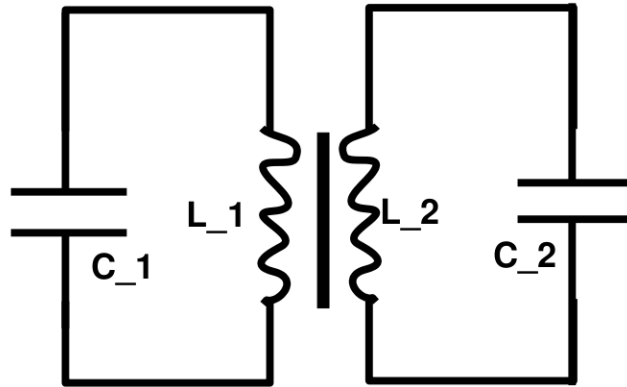


Abbildung 1: Grenzübergang

Interessant ist die Analogie zur Molekülphysik. Hier wäre die niederfrequente Lösung die symmetrische bindende Lösung, die hochfrequente die antisymmetrische antibindende Lösung (siehe später Ex.4).