

Blatt 12

Tutorium HM 2

16. Juli 2009

*Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.*

Auf diesem Blatt beschäftigen wir uns mit komplexer Analysis. Im Folgenden sollen Begriffe wie Holomorphie, Cauchyintegralsatz, Residuensatz und Laurentreihe erläutert werden.

1 Holomorphe Funktionen

Definition:

$f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn f in D komplex differenzierbar ist.

D.h. es existiert der Differenzenquotient

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

für alle $z_0 \in D$. Wir können den DQ mit $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ auch umschreiben in die Form

$$f'(z_0 = x_0 + iy_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Wenn wir jetzt den Grenzübergang $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$ betrachten, so sind zwei Fälle zu betrachten, die beide erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} & \underline{y = y_0; x \rightarrow x_0} \\ & \rightarrow f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ & = \partial_x u + i \partial_x v \end{aligned}$$

Auf analoge Weise zweigt man:

$$\begin{aligned} \underline{x = x_0; y \rightarrow y_0} \\ \rightarrow f'(z_0) = -i\partial_y u + \partial_y v \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhalten wir die Cauchy-Riemann-DGL $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$.

Ist f in D stetig partiell diffbar und sind die Cauchy-Riemannschen DGL erfüllt, so ist f holomorph.

Jede holomorphe Funktion f lässt sich in eine Taylorreihe entwickeln. Dementsprechend ist jede Ableitung der Funktion f wieder holomorph. Daraus erkennen wir eine nette Eigenschaft. Ist f holomorph, so auch f' und es gilt:

$$f'(z) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u$$

Die Cauchy-Riemannschen DGL ergeben sich aus der linken Seite durch $\partial_{xx}u = \partial_{yx}v$, $\partial_{xy}u = -\partial_{xx}v$, die rechte liefert $\partial_{xy}v = -\partial_{yy}u$, $\partial_{xy}u = \partial_{yy}v$. Nach dem Satz von Schwarz erkennen wir, dass u und v harmonisch sind, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_{xx}u + \partial_{yy}u &= 0 \\ \partial_{xx}v + \partial_{yy}v &= 0. \end{aligned}$$

2 Der Cauchy-Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ ein geschlossener Integrationsweg in G . Dann ist

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0$$

Das sehen wir schnell ein, wenn wir den Weg γ durch Kreissegmente um einen Punkt z_0 parametrisieren, also $z - z_0 = r \exp(i\phi)$. Aufgrund der Holomorphie können wir f entwickeln

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots$$

Wir berechnen also Integrale der Form:

$$\oint_{\gamma} dz (z - z_0)^k = i \int_0^{2\pi} d\phi r^{k+1} \exp(i\phi \cdot (k+1)) = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für holomorphe Funktionen wird das Integral also immer stets Null. Jedoch haben wir mit obiger Rechnung gesehen, dass $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz \frac{1}{z-z_0} = 1$ gilt. Damit kommen wir zu folgender Erkenntnis:

$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma \in G$ eine doppel-punktfreie geschlossene stückweise glatte positiv orientierte Kurve, deren Innengebiet D zu G gehört. Es gilt dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\xi \frac{f(\xi)}{\xi - z}, \quad z \in D$$

(Cauchy-Integralsatz)

Beispiele:

$$\oint_{|z|=2} dz \frac{1}{z(z-3)} = 2\pi i \frac{1}{0-3} = \frac{-2\pi i}{3}$$

$$\oint_{|z|=3} dz \frac{1}{z(z-2)} = \oint_{|z|=3} dz \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{z} \right) = 0$$

3 Laurententwicklung

Gehen wir von dem Cauchy-Integralsatz aus, so erkennen wir durch mehrfache Ableitung, dass gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}$$

Analog zur Taylorentwicklung definieren wir:

f sei eine im Kreisring $r < |z - z_0| < R$ holomorphe Funktion. Sie besitzt dann eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \oint d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$$

$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$ heißt Hauptteil, der Anteil $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Nebenteil der Laurentreihe.

Ein weiterer wichtiger Bestandteil der Laurentreihe, dem wir einen Namen geben müssen, ist das Residuum a_{-1} von f in z_0 . Man schreibt $a_{-1} = \text{Res}(f; z_0)$.

3.1 Isolierte Singularitäten

Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 isolierte Singularität von f .

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität, so kann dieses f in eine Laurentreihe in $D \setminus \{z_0\}$ entwickelt werden. Man kann mit dieser die isolierten Singularitäten klassifizieren:

- z_0 ist eine hebbare Singularität, von f , wenn der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet (Bemerkung: „Hebbare Singularitäten sind keine.“)
- z_0 ist genau dann ein Pol, wenn der Hauptteil nicht identisch verschwindet, aber abbricht.
- z_0 ist eine wesentliche Singularität von f , wenn der Hauptteil nicht abbricht.

4 Der Residuensatz

Es sei f eine holomorphe Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G außer in den Singularitäten $z_1, \dots, z_n$. γ sein ein Weg in diesem Gebiet, der diese Singularitäten positiv orientiert umschließt. Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k)$$

Die Beweisidee ist recht einfach. Wir haben gesehen, dass sich f in eine Laurentreihe entwickeln lässt, welche Terme $\frac{1}{(z-z_0)^k}$ enthält. Berechnen wir das Wegintegral über einen Weg, der die Singularität z_0 umschließt, so liefert nur der Term mit $k = 1$ einen Beitrag. Der Rest verschwindet. Da der Vorfaktor vor diesen Beiträgen jeweils das Residuum ist, bleibt nach Integration nur die Summe über diese übrig.

Beispiel:

$$\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z)}{(z-1)(z-2)} = 2\pi i \left(\frac{\cos(1)}{-1} + \frac{\cos(2)}{1} \right)$$