

Blatt 3

Tutorium HM 2

6. Mai 2009

Auf diesem Blatt geht es um Quadriken, eine Möglichkeit der Beschreibung von (n-1)-dimensionalen Oberflächen im $\mathbb{R}^n$. Ein wichtiger Begriff, der in diesem Zusammenhang auftaucht ist der der Definitheit von Matrizen. Diesen Begriff will ich zunächst motivieren, bevor ich auf die Quadriken zu sprechen komme. Ein weiteres Thema sind gewöhnliche Differentialgleichungen. Ich will verschiedene Ansätze vorstellen, mit denen die Aufgaben gelöst werden können.

1 Motivation

So langsam nähern wir uns dem Thema Funktionen mehrerer Veränderlicher. D.h. wir haben z.B. eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, kurz $f(x, y)$, deren lokales Verhalten wir hinsichtlich Extrema untersuchen wollen. Wie im Eindimensionalen Fall kann auch f in eine Taylorreihe um einen Punkt (x_0, y_0) entwickelt werden. Diese hat als erste Komponenten

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} (x - x_0, y - y_0) \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_y \partial_x f & \partial_y \partial_y f \end{pmatrix}_0}_H \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die Matrix H heißt hier Hessematrix. Was hier wichtig ist verät ein Blick auf die HM I. Eine Funktion $g(x)$ hat ein Extremum an einer Stelle, wenn die Ableitung an dieser verschwindet: $\partial_x g(x)|_{x_0} = 0$. Auskunft darüber, ob es sich um ein Minimum, Sattelstelle oder Maximum handelt, gibt hier die zweite Ableitung von g an der Stelle x_0 . Ist $\partial_x \partial_x g(x)|_{x_0} > 0$, so haben wir z.B. ein Minimum vorliegen. Ähnlich ist dies bei der Funktion $f(x, y)$ mit zwei veränderlichen. Hier liegt ein „stationärer“ Punkt (Extrem- oder Sattelstelle), wenn der Gradient von f an der Stelle (x_0, y_0) verschwindet.

$$\begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stationärer Punkt (x_0, y_0)

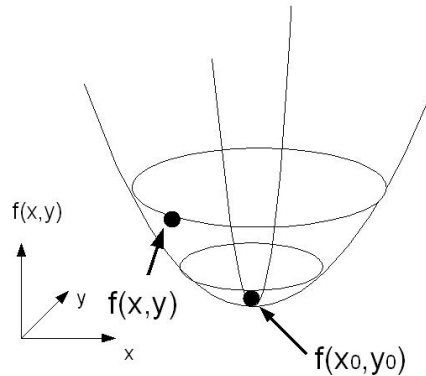


Abbildung 1: Minimum von $f(x, y)$

Damit also mit $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ ein Minimum vorliegt, muss der Term in nächster Ordnung

$$\frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)H \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} > 0$$

sein. Man sagt H ist positiv definit.

2 Definitheit (A2)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv definit** (**negativ definit**), wenn mit einem beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad (\text{pos. definit})$$

$$< 0 \quad (\text{neg. definit})$$

A heißt **indefinit**, wenn sowohl negative als auch positive Werte von Q angenommen werden. Im Fall $Q(\vec{x}) \geq 0$ (≤ 0) nennt man A **positiv semidefinit** (**negativ semidefinit**).

Man kann die Quadrik $Q(\vec{x})$ auch so umformen, dass eine beliebige Matrix A symmetrisch wird, so dass $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T B \vec{x}$ mit $B = B^T$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
Q(\vec{x}) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + 2x_2x_1 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\
&= x_1^2 + 3x_2x_1 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 \\
&= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jede Aussage, die wir bzgl. der Definitheit einer Matrix treffen, kann also auf den Fall einer symmetrischen Matrix ($A = A^T$) reduziert werden.

Wir erinnern uns, dass man eine symmetrische Matrix A auf Diagonalgestalt transformieren kann mit einer Matrix S aus orthonormierten Eigenvektoren zu Λ .

$$AS = S\Lambda \Rightarrow \Lambda = S^T AS$$

Hierbei war $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit den Eigenwerten λ_i . Eine Diagonalmatrix ist ganz offensichtlich positiv (negativ) definit, wenn alle Diagonalelemente größer (kleiner) null sind. Für positive Definitheit musste $Q(\vec{x}) > 0$ sein für ein beliebiges $\vec{x}$. Wählen wir also für $A = A^T$ ein $\vec{y} = S\vec{x}$, so erhalten wir

$$Q(\vec{y}) = (S\vec{x})^T AS\vec{x} = \vec{x}^T S^T AS\vec{x} = \vec{x}^T \Lambda \vec{x}.$$

Sind also z.B. alle Eigenwerte von A $\lambda_i > 0$, so ist A positiv definit. Zusammengefasst:

A heißt

$$\begin{aligned}
\text{positiv definit} &\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \\
\text{positiv semidefinit} &\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \\
\text{negativ definit} &\Leftrightarrow \lambda_i < 0 \\
\text{negativ semidefinit} &\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0
\end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Sonst ist A indefinit.

Es gibt aber noch eine zweite Methode zur Überprüfung der Definitheit, nämlich die von Jacobi:

Eine Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit, wenn die Determinanten der Hauptuntermatrizen A_i positiv sind

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

, für $k = 1, \dots, n$. (Ohne allgemeinen Beweis)
 Beispiel für $n=2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{d+a}{2} \pm \sqrt{\frac{(d+a)^2}{4} - (ad-b^2)}$$

Wir sehen: Ist $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$, so ist A positiv definit, ...

3 Quadriken (A1)

Wir betrachten quadratische Polynome $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0$$

Wir wollen Q auf die einfachere Form $\tilde{a}_1 y_1^2 + \tilde{a}_2 y_2^2 + \dots + b_1 y_1 + \dots + c = 0$ bringen. Die Idee: symmetrische Matrix A konstruieren $\rightarrow$ Transformation, so dass $A \rightarrow \Lambda$ Diagonalgestalt hat.

Also:

1. Die in x_i, x_j quadratischen Terme werden in einer Diagonalmatrix zusammengefasst. Beachte

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_j x_i$$

2. Berechne Matrix S aus orthonormierten Eigenvektoren und führe Transformation $\vec{y} = S\vec{x}$ ein:

$$\begin{aligned} Q(\vec{y}) &= (S\vec{y})^T A S\vec{y} + \vec{b}^T S\vec{y} + c \\ &= \vec{y}^T S^T A S \vec{y} + (S^T \vec{b})^T \vec{y} + c \\ &= \vec{y}^T \underbrace{\Lambda}_{diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \vec{y} + \underbrace{(S^T \vec{b})^T}_{=: (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)} \vec{y} + c \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + \tilde{b}_1 y_1 + \dots + \tilde{b}_n y_n + c = 0 \end{aligned}$$

3. Quadratische Ergänzung für $\lambda_i \neq 0$:

$$\begin{aligned}\lambda_i y_i^2 + \tilde{b}_i y_i &= \lambda_i \left(y_i^2 + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} y_i \right) \\ &= \lambda_i \left(y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i}\end{aligned}$$

Definiere also

$$z_i := \begin{cases} y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} & \lambda_i \neq 0 \ (i = 1, \dots, k) \\ y_i & \lambda_i = 0 \ (i = k+1, \dots, n) \end{cases}$$

Also erhalten wir mit der Konstante $\tilde{c} = c - \sum_{m=1}^k \frac{\tilde{b}_m^2}{4\lambda_m}$

$$Q(\vec{z}) = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_k z_k^2 + \tilde{b}_{k+1} z_{k+1} + \dots + \tilde{b}_n z_n + \tilde{c} = 0$$

Toll! Und was bringt uns das nun? Wir können diese Form wesentlich einfacher geometrisch deuten. Ist es nun ein Ellipsoid, ein Paraboloid, ein hyperbolischer Zylinder, ...? Die Kriterien für die einzelnen Formen findet ihr gut zusammengefasst im Repetitorium der HM auf Seite 240. Eine gute grafische Veranschaulichung liefert der Meyberg-Vachenauer (S.344, sechste Auflage).

Kurzes Beispiel:

$$x^2 + y^2 - 3z = 0$$

beschreibt ein elliptischen Paraboloid, wie er in Abb. 1 zu sehen ist.

4 Differentialgleichungen (A5, A6)

Zu diesem Thema gibt es sehr viele verschiedene Herangehensweisen, v.a. dann, wenn man die Anzahl der Veränderlichen erhöht (partielle DGL). Ich beginne mit einer euch bekannten Motivation und gehe dann über zu zwei Ansätzen zum Lösen der hier gegebenen DGL.

4.1 Motivation

Ein wenig Elektrodynamik: Betrachten wir einen geschlossenen Stromkreis, so bleibt die Ladung innerhalb von diesem erhalten. In der Elektrodynamik wird diese Tatsache ausgedrückt durch die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0.$$

Hierbei ist $\vec{J}$ die Stromdichte („Strom / Fläche“) und ϱ die Ladungsdichte („Ladung / Volumen“). Im stationären Fall ($\partial_t \varrho = 0$) gilt:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Greifen wir uns einen Knotenpunkt in dem Netzwerk heraus und betrachten diesen als ein Volumenelement ΔV , so besagt obige Gleichung, dass pro Zeiteinheit genauso viel Ladung in ΔV herein, wie herausfließt, denn (Satz von Gauß kommt noch in der VL)

$$\int d^3\vec{x} \nabla \cdot \vec{J} = \oint d\sigma \hat{n} \cdot \vec{J} = \sum_i I_i = 0$$

mit Oberflächenelement σ . Diese „**Knotenregel**“ angewandt auf den ersten Knoten liefert z.B. $I - I_1 - I_2 = 0$. Desweiteren braucht ihr noch die „Maschenregel“. Aus den Maxwell-Gleichungen erhaltet ihr im stationären Fall aus $\nabla \times \vec{E} = 0$ und dem Satz von Stokes (kommt auch noch) die Bedingung:

$$\oint_{\varsigma_1} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \oint_{\varsigma_2} d\vec{x} \cdot \vec{E}$$

für zwei unterschiedliche Wege ς_1 und ς_2 . Da obige Gleichung aber gerade die Spannung definiert, folgt die Bedingung, dass die über einem geschlossenen Kreis (Masche) abfallenden Spannungen (z.B. an Widerständen) in Summe gleich null sein müssen:

$$\sum_i U_i = 0 \quad (\text{Maschenregel})$$



Abbildung 2: LR-Schaltkreis

Betrachten wir den Schaltkreis in Abbildung 2, so ergibt sich nach der Maschenregel

$$U(t) + U_L + U_R = 0$$

Hierbei ist U_L die über die Induktivität (Spule), U_R die über den Widerstand abfallende Spannung, die mit dem durch den Kreis fließenden Strom I folgendermaßen in Beziehung stehen:

$$U_L = -L \frac{d}{dt} I = L \dot{I}$$

$$U_R = -R I$$

Diese Beziehungen ergeben sich aus den Maxwell-Gleichungen. Wir erhalten damit eine lineare DGL erster Ordnung in I :

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} I(t) + \frac{1}{L} U(t) \quad (\text{siehe A5})$$

Wie können wir diese lösen?

4.2 DGL mit getrennten Variablen

Eine DGL der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

nennt man eine DGL mit getrennten Variablen, die gelöst werden kann, indem man nach Termen in x bzw. y sortiert und danach integriert:

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = f(x)$$

$$\int_0^x d\tilde{x} \frac{y'(\tilde{x})}{y(\tilde{x})} = \int_{y(x_0)}^{y(x)} dy \frac{1}{y}$$

$$= \int_{x_0}^x d\tilde{x} f(\tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{y(x)}{y_0} \right) = \int_{x_0}^x d\tilde{x} f(\tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow y(x) = y_0 \exp \left(\int_{x_0}^x d\tilde{x} f(\tilde{x}) \right) =: y_h(x) \quad (*)$$

4.3 Variation der Konstanten

Haben wir in obiger DGL noch einen inhomogenen Term $b(x)$ stehen, d.h.

$$y' = f(x)g(y) + b(x) \quad (**),$$

so können wir von der homogenen Lösung $y_h(x)$ (*) ausgehend den Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = c(x) y_h(x)$$

machen, der sich „Variation der Konstanten“ nennt. Eingesetzt in (**) ergibt sich die neue DGL

$$y'(x) = c'(x) y_h(x) + \underline{c(x) y_h'(x)} = \underline{f(x) c(x) y_h(x)} + b(x)$$

$$c'(x) = \frac{b(x)}{y_h(x)}$$

Die eindeutige Lösung des Problems ist dann gegeben durch:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_h(x) + y_h(x) \int_{x_0}^x d\tilde{x} \frac{b(\tilde{x})}{y_h(\tilde{x})}.$$

4.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Hier will ich nur das Beispiel einer linearen DGL 2ter Ordnung bringen. Die Verallgemeinerung ist einfach und schon in der VL geschehen. Das Problem: Ihr habt eine DGL der Form:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ein Ansatz diese DGL zu lösen wäre $y = e^{\lambda x}$. Damit erhalten wir:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Damit wäre die Lösung des Problems gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x},$$

unter der Voraussetzung, dass $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Wenn $\lambda_+ = \lambda_-$, muss man sich neben der Lösung $y_1(x) = c_1 e^{\lambda x}$ noch eine weitere Lsg. konstruieren, so dass man ein vollständiges Lösungssystem erhält. Das geht am besten über die Variation der Konstanten. Der Ansatz $y_2(x) = c(x) y_1(x)$ führt dann auf die Gleichung $c'(x) = \text{const.}$ und damit $y_2(x) \propto x e^{\lambda x}$. Also wäre in diesem Fall die allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$