

Blatt 7

Tutorium HM 2

3. Juni 2009

*Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.*

Auf diesem Blatt findet sich viel neues: Taylorentwicklung von Funktionen mehrerer Veränderlicher, Bestimmung von Extrema einer Funktion ohne und mit Nebenbedingungen, Differentialoperatoren Divergenz und Rotation.

1 Taylorentwicklung - A1

Nehmen wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ her, wobei $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ sei. Wir wollen nun die Funktion um den Punkt $(x^0, y^0)^T$ Taylorentwickeln.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}^0) + (\nabla f(\vec{x}^0))^T (\vec{x} - \vec{x}^0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (\vec{x} - \vec{x}^0)^T \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}}_{H_f} (\vec{x} - \vec{x}^0) + Rest \quad (*) \end{aligned}$$

Der Beweis dieser Reihe ist analog dem in einer Dimension. Dort hatten wir für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Taylorentwicklung um den Punkt x_0 wie folgt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + Rest$$

Wie wir im letzten Tutorium gelernt haben, ist die Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher gerade die Jacobimatrix. Aus dem eindimensionalen Fall folgern wir also folgende Zuordnungen für eine skalare Funktion, definiert auf dem $\mathbb{R}^2$ (s.o.):

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\longrightarrow J_f(\vec{x}_0) = (\nabla f(\vec{x}_0))^T \\ f''(x_0) &\longrightarrow J_{J_f}(\vec{x}_0) = J_{\nabla f}(\vec{x}_0) = H_f(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Letztere Matrix identifizieren wir gerade als die Hessematrix H_f .

Der Rest in (*) beginnt mit dritter Ordnung in $(\vec{x} - \vec{x}^0)$. Die dort auftauchenden dritten Ableitungen $\partial_i \partial_j \partial_k f$ können nun nicht mehr in gleicher Weise in eine Matrix, wie die Hessematrix H_f gepackt werden. Was immer geht, ist die Schreibweise in Indizeschreibweise:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}^0) + \sum_i \partial_i f(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0) \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{ik} \partial_i \partial_k f(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \partial_i \partial_j \partial_k f(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) \\ &+ \text{Rest} \end{aligned}$$

Wie man leicht erkennt, tauchen hier Terme mehrfach auf. Ein Anliegen wäre also, die Reihe nach Termen $(x_1 - x_1^0)^{j_1} \dots (x_n - x_n^0)^{j_n}$ zu ordnen, d.h.

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k} c_{j_1\dots j_n} (x_1 - x_1^0)^{j_1} \dots (x_n - x_n^0)^{j_n}$$

Die Koeffizienten $c_{j_1\dots j_n}$ gilt es nun zu bestimmen. Das geschieht einfach durch Betrachten der Ableitungen $\partial_1^{j_1} \dots \partial_n^{j_n} f(\vec{x}^0)$. Mit $|\vec{x} - \vec{x}^0| < 1$ ist offensichtlich:

$$\begin{aligned} \partial_1^{j_1} \dots \partial_n^{j_n} f(\vec{x}) &= c_{j_1\dots j_n} (j_1! \dots j_n!) + O(|\vec{x} - \vec{x}^0|) \\ &\rightarrow c_{j_1\dots j_n} (j_1! \dots j_n!) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

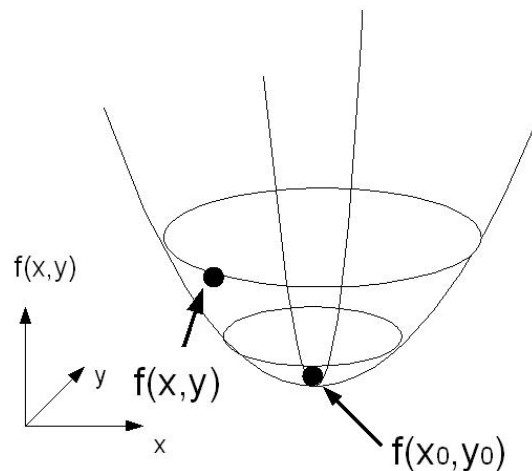
$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k} \frac{1}{j_1! \dots j_n!} (x_1 - x_1^0)^{j_1} \dots (x_n - x_n^0)^{j_n} \partial_1^{j_1} \dots \partial_n^{j_n} f(\vec{x}^0)$$

Oft braucht man sich aber nicht dieser Gleichung bedienen. Es reicht meist die Kenntnis der Taylorentwicklung im Eindimensionalen.

Beispiel: Entwickle die Funktion $f(x, y) = e^x \sinh(y)$ nach zweiter Ordnung um den Punkt $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^x \sinh(y) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) \left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \dots\right) \\ &= y + xy + O^3 \end{aligned}$$

2 Extrema - A2,3



Man nennt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ einen stationären Punkt, falls $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$, mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nämlich dann sind offensichtlich alle Tangentialvektoren waagerecht. Entwickeln wir die skalare Funktion um den stationären Punkt $\vec{x}_0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) \\
 &+ \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{=0} \\
 &+ \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{11}f & \cdots & \partial_{1n}f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1}f & \cdots & \partial_{nn}f \end{pmatrix}}_{H_f} (\vec{x} - \vec{x}_0) + \dots
 \end{aligned}$$

Uns interessiert nur die Differenz $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|$. Diese ist größer Null, wenn die Hessematrix H_f **positiv definit** ist (**lokales Minimum**) und kleiner null, wenn sie **negativ definit** ist (**lokales Maximum**). Ist die indefinit im Punkt $\vec{x}_0$, so liegt ein Sattelpunkt vor. Sucht ihr das globale Maximum oder Minimum einer Fläche, so sind natürlich auch die Ränder in Betracht zu ziehen.

3 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen - A5

Im Fall, dass der Punkt $\vec{a}$ bestimmt werden soll, für den $f(\vec{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ extremal wird, gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten.

3.1 Explizit

Wir lösen die Nebenbedingung $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, falls möglich, nach einer Variablen $x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ auf und lösen das Problem

$$f(x_1, \dots, h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \dots, x_n) = \text{extremal!}$$

3.2 Parametrisierung

Können wir die Nebenbedingung z.B. durch eine Kurve Parametrisieren: $g(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(t)$, so reduziert sich das Problem aufs Eindimensionale:

$$f(\vec{x}(t)) = f(t) = \text{extremal!} \rightarrow \dot{f}(t) = 0$$

3.3 Lagrange-Multiplikatorregel

Sei $g(\vec{x}) = 0$ die Nebenbedingung, unter der $f(\vec{x})$ extremal werden soll. Sei g nach einer Variablen x_n lokal umkehrbar: $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$. Dann gilt es nur noch das Problem

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = \text{extremal!}$$

zu lösen. Das Maximum sei in $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Anwendung der Kettenregel liefert für eine Komponente des Gradienten:

$$0 = \partial_i f(\vec{a}) + \partial_n f(\vec{a}) \partial_i h(a_1, \dots, a_{n-1})$$

Mit $0 = \frac{dg}{dx_i} = \partial_i g + \partial_n g \partial_i h$ folgt

$$0 = \partial_i f(\vec{a}) - \partial_n f(\vec{a}) \frac{\partial_i g(\vec{a})}{\partial_n g(\vec{a})}$$

Sei $\lambda := -\frac{\partial_n f(\vec{a})}{\partial_n g(\vec{a})}$. Dementsprechend müssen nur noch die Gleichungen

$$\partial_i f(\vec{a}) - \lambda \partial_i g(\vec{a}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$g(\vec{a}) = 0$$

gelöst werden. Das sind n Gleichungen für n Variablen. Die Lagrange-Multiplikatormethode ist auf beliebig viele Nebenbedingungen $g_l(\vec{x}) = 0 \quad (l = 1 \dots k)$ erweiterbar. Sei

$$H(\vec{x}, \{\lambda_l\}) = f(\vec{x}) + \sum_{l=1}^k \lambda_l g_l(\vec{x})$$

, dann gilt es das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_1 H &= \partial_1 f(\vec{x}) + \sum_{l=1}^k \lambda_l \partial_1 g_l(\vec{x}) = 0 \\ &\vdots \\ \partial_n H &= 0 \\ \partial_{\lambda_1} H &= g_1(\vec{x}) = 0 \\ &\vdots \\ \partial_{\lambda_k} H &= g_k(\vec{x}) = 0 \end{aligned}$$

zu lösen.

4 Rotation und Divergenz - A7

Diese Begriffe sind sicherlich schon in der Elektrodynamik gefallen, spätestens durch die Einführung der Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \end{aligned}$$

Wir fassen zunächst deren Definitionen zusammen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3 = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \partial_i v_i}_{\text{Skalarprodukt}} \\ [\nabla \times \vec{v}]_i &= \underbrace{\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j v_k}_{\text{Kreuzprodukt}} \end{aligned}$$

Was hat es anschaulich mit den Operatoren Rotation $\nabla \times$ und Divergenz $\nabla \cdot$ auf sich?. Sei $\vec{v}$ z.B. ein Geschwindigkeitsfeld, so führt $\nabla \times \vec{v} = 0$ zu der Bedingung, dass das Feld

$\vec{v}$ wirbelfrei ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} dS \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{v} &= \oint d\vec{r} \cdot \vec{v} \\ \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{v} &\approx \frac{1}{\sigma} \oint d\vec{r} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Die rechte Seite beschreibt aber gerade die Wirbelstärke des Geschwindigkeitsfeldes. Nehmen wir lokal (d.h. die Fläche σ sei klein) eine rotierende Flüssigkeit an, so kann $v = \omega r$ und $\sigma = \pi r^2$ gesetzt werden. Das Wegintegral führt dann zu

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{v} &\approx \frac{1}{\sigma} \oint d\vec{r} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{\pi r^2} 2\pi r \cdot \omega r \\ &= 2\omega\end{aligned}$$

Ist also $\nabla \times \vec{v} = 0$, so ist auch die Winkelgeschwindigkeit des lokalen Wirbels gleich Null. Somit existieren keine Wirbel in der Strömung.

Die Divergenz kann ebenfalls anschaulich in der Strömungslehre behandelt werden. Und zwar schauen wir uns an, welche Menge an einem bestimmten Medium mit Dichte $\rho = \frac{\text{Menge}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ pro Zeiteinheit durch ein Volumenelement ΔV fließt. Dazu ist es notwendig, den Fluss durch die Oberfläche des Volumenelements zu betrachten. Der Fluss durch ein Flächenelement ΔA ist gerade $\frac{\Delta \dot{N}}{\Delta A} = \rho \cdot \vec{v}$. Also ergibt sich die Gesamtmenge des durch die geschlossene Fläche tretenden Mediums durch

$$\dot{N} = \oint dA \hat{n} \cdot \rho \cdot \vec{v} = \int dV \nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Gauß (kommt später in der VL) verwendet. Danach tritt für $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, d.h. $\dot{N} = 0$ (Teilchenzahl konstant), genauso viel des Mediums durch die Oberfläche ein, wie austritt. Das bedeutet aber nichts anderes, als dass innerhalb des Volumenelements nichts weiteres hinzukommt bzw. weggenommen wird. Also gibt es bei $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ weder Quellen noch Senken.