UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
23.04.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A

a) mit Hilfe der Leibnizformel.

b) durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

c) indem ein Einheitsvektor durch Spaltenumformungen erzeugt wird und dann nach diesem entwickelt wird.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist C regulär?

Aufgabe 3

Gegeben seien n reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $n \geqslant 2$. Zeigen Sie, dass für die Determinante der sog. *Vandermonde-Matrix* gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_k - x_j)\,.$$

Hinweis: Erzeugen Sie durch geeignete Spaltenoperationen möglichst viele Nullen in der ersten Zeile und entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile.

Aufgabe 4

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}A^\top A^2 A^\top A^{-1}) = (\det A)^2$.

c) $\det(A+B) = \det A + \det B$.

d) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Cramerschen Regel.

Aufgabe 6

Gegeben seien die Permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\sigma \circ \pi$ und $\pi \circ \sigma$.

b) Bestimmen Sie $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ und bestätigen Sie, dass $(\sigma \circ \pi)^{-1} = \pi^{-1} \circ \sigma^{-1}$ gilt.

c) Geben Sie σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen an und bestimmen Sie das Signum $\mathrm{sgn}(\sigma)$ von σ.

Aufgabe 7

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $x \times y$, $(x \times y|x)$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Achtung: Am **Montag, den 04.05.2009,** findet von 8:00 bis 9:30 Uhr in Chemie Neuer Hörsaal (30.46) eine **Übung** statt als Ersatz für die am 1. Mai ausfallende Veranstaltung.

Wichtige Termine im Sommersemester 2009

Übungsklausur zu HM II:	Samstag,	20.06.2009,	09:00 - 11:00 Uhr
Klausur zu HM II / KAI:	Montag,	21.09.2009,	08:00 - 11:00 Uhr

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.