Blatt 1

Tutorium HM 2

28. April 2009

1 Skalarprodukt

Seien $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Um den Winkel zwischen diesen zu bestimmen, definieren wir ein Skalarprodukt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_i a_i \, b_i = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \, cos\phi$$

Bemerkungen:

- Stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander $\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, so ist $cos\phi = 0$ und $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.
- $\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|} = |\vec{b}| cos\phi$ ist die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.
- Man kann das Skalarprodukt auch axiomatisch einführen. Seien z.B. $a, \, b \in \mathbb{C}^3$. Dann ist das Skalarprodukt definiert durch $< a, b >:= a \cdot b^*$.
  1. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle^*$
  2. $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
  3. $\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle = \lambda^* \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
  4. $\langle \vec{a} + b, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$
  5. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Axiomensystem 1-5 ist viel allgemeinere Definition des Skalarprodukts. So erfüllt u.a. das Integral

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g^*(x) \, dx$$

mit $f, g : [a, b] \in C \to C$ die Punkte 1-5 und kann somit als Skalarprodukt im Funktionenraum interpretiert werden.
Schreibe Vektor im $\mathbb{R}^3$ mit karthesischer Basis $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Dann lässt sich das SP schreiben als

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle \sum_i a_i \vec{e}_i, \sum_k b_k \vec{e}_k \rangle \\ &= \sum_i \sum_k a_i b_k \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle \end{aligned}$$

Definiere Kroneckersymbol

$$\delta_{ik} := \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = \begin{cases} 1, \text{ für } i = k \\ 0, \text{ für } i \end{cases}$$

Damit ist wie gehabt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_i a_i \, b_i$.

2 Vektorprodukt

Ein auf dem $\mathbb{R}^3$ definiertes „inneres“ Produkt. D.h. es bildet zwei Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ des

$\mathbb{R}^3$ auf einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ ab. Vorschrift:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
2. $(\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
3. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

Wieder mit karthesischer orthonormierter Basis

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= (\sum_j x_j\vec{e}_j) \times (\sum_k y_k\vec{e}_k) \\ &= \sum_{jk}(\vec{e}_j \times \vec{e}_k)x_jy_k \end{aligned}$$

Betrachte i-te Komponente des Kreuzprodukts

$$[\vec{x} \times \vec{y}]_i = \sum_{jk}[\vec{e}_j \times \vec{e}_k]_i x_jy_k$$

Definiere als *Abkürzung* das Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} := [\vec{e}_j \times \vec{e}_k]_i = \begin{cases} 0, \; i = j, j = k, k = i \\ 1, \; ijk = 123, \, 312, \, 231 \\ -1, \; ijk = 213, \, 321, \, 132 \end{cases}$$

Damit lässt sich die ite Komponente des Kreuzprodukts schreiben als

$$[\vec{x} \times \vec{y}]_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}x_jy_k$$

Man kann relativ leicht zeigen, dass

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \; (*)$$

Mit dieser Gleichung können Vektoridentitäten bequem hergeleitet werden.
Beispiel: („bac-cab-Regel“)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot c) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \sum_{jklm} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}a_jb_lc_m \end{aligned}$$

Benutze die Indentität $(*)$ mit $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \sum_{jlm}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m \\ &= b_i\sum_m a_mc_m - c_i\sum_l a_lb_l \\ &= [\vec{b}(\vec{a} \cdot c) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})]_i \end{aligned}$$

3 Determinanten (A1, A4)

Motivation: Wir sind interessiert an der Fläche des Parallelogramms, das von Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Diese ist gerade $F = |\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1b_2 - a_2b_1|$. Schreiben wir die obigen Vektoren in einer Matrix zusammen, so definieren wir als Determinante dieser Matrix

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ det(A) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

Der Betrag dieser Determinante entspricht also dem „Volumen“ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelepipids. Sie hat also die Eigenschaft einer *Volumenfunktion.* Analog kann man also die Determinante für eine 3×3-Matrix über das Spatprodukt $(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))$ definieren:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right) \tag{2}$$

$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \tag{3}$$

Hierbei ist ϵ_{ijk} der oben definierte Epsilontensor. Er ist ein Faktor, der uns je nach Permutationen der drei unterschiedlichen Zahlen ijk ein positives oder negatives Vorzeichen gibt (gerade Permutation 123 $\rightarrow$ ungerade Permutation durch Vertauschen zweier Zahlen (Transposition) 213 $\rightarrow$ nochmalige Transposition liefert gerade Permutation 312, usw). Wir können (3) also auch schreiben als

$$det(A) = \sum_{ijk} (-1)^k a_{i1} a_{j2} a_{k3}$$

, wobei k die Anzahl der Transpositionen ist, um ijk in die natürliche Reihenfolge 123 zu bringen. Für eine $n\times n$-Matrix B definieren wir ganz analog die Determinante durch

$$det(B) = \sum_{i=\{i_1,...,i_n\}} (-1)^k b_{i_1 1} ... b_{i_n n} \tag{4}$$

Das ist die sogenannte **Leibnitzformel**. Wir können (4) folgende Eigenschaften entnehmen:

- Vertauschen einer Zeile ändert das Vorzeichen der Determinanten (, da Transposition $\rightarrow \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$) .

- Die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Zeilen-/Spaltenvektoren verschwindet.

- Sie ist eine n-Linearform, d.h.

  $det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k + \lambda\vec{b}_k, ..., \vec{a}_n)$
  $= det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, ..., \vec{a}_n) + \lambda\, det(\vec{a}_1, ..., \vec{b}_k, ..., \vec{a}_n)$

- aufgrund der letzten beiden Punkte verändert die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen die Determinante nicht!

3.1 Determinanten - Berechnung

Aufgund obiger Eigenschaften können wir über **Gaußelimination** die Determinante

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

auf die Form

$$det(A) = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} \end{vmatrix}$$

bringen. Nach (4) erhalten wir die Determinante, indem wir die Diagonallemente multiplizieren: $det(A) = \prod_i \tilde{a}_{ii}$. Eine weitere Mehtode ist der **Entwicklungssatz von Laplace**: Nehmen wir uns (4) vor und greifen uns die Summation über eine Zeile (beliebig) heraus, so ergibt sich:

$$det(B) = \sum_{i_1=1}^{n} (-1)^{i_1+1} b_{i_1 1} \underbrace{\sum_{i=\{i_2,...,i_n\}} (-1)^k b_{i_2 2} ... b_{i_n n}}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} (-1)^{i_1+1} b_{i_1 1} \quad det(\tilde{B}_{Untermatrix})$$

, wobei k nur noch die Permutation der $\{i_2, ..., i_n\}$ beschreibt und der Beitrag von i_1 zur Permutation durch den Faktor $(-1)^{i_1+1}$ herausgezogen wurde. Was das obige nun anschaulich heißt, soll an einem Beispiel erläutert werden. Sei $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Dann ergibt sich die Determinante in obigem Entwicklungssatz durch:

$$det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$
$$= b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

Nun können wir das gleiche Verfahren wieder auf die 2×2-“Untermatrizen“ anwenden und erhalten das gesuchte Ergebnis, was mit (2) übereinstimmt.
Noch kurz ein paar Eigenschaften:

- $det(A) + det(B) \neq det(A + B)$
- $det(AB) = det(BA)$
- $det(AB) = det(A) \cdot det(B) \Rightarrow det(A^k) = (det(A))^k$

4 Die Cramer'sche Regel (A5)

Mit einer invertierbaren Matrix $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung

$$x_i = \frac{1}{det(A)} det(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_n)$$

Die i-te Spalte der Matrix wird also einfach durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzt. Der Beweis ist sehr einfach und bedient sich der Linearität der Determinante (siehe Punkt 3 der Eigenschaften in Abschnitt 3). Wir betrachten die Determinante

$$det(\vec{b}, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$$
$$\underbrace{=}_{\vec{b}=A\vec{x}=\sum_i x_i \vec{a}_i} det(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$$
$$\underbrace{=}_{\text{Linearität}} \sum_{i=1}^{n} x_i \, det(\vec{a}_i, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$$
$$= x_1 \, det(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) = x_1 \, det(A)$$

, wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass alle Determinanten verschwinden, bis auf die mit $\vec{a}_i = \vec{a}_1$, da Determinanten mit linear abhängigen Zeilen- bzw. Spalten-Vektoren verschwinden (siehe oben).

Blatt 1 - Ergänzung

Tutorium HM 2

29. April 2009

Zunächst will ich nochmal was zu linearen Gleichungssystemen und der inversen Matrix sagen (Wiederholung vom letzten Semester).

1 LGS aus Matrizen

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zu lösen sei das Gleichungssystem

$$AX = B$$

nach X. Schema: Wir gehen wie beim LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ vor, bilden zunächst eine erweiterte Matrix und bringen die rechte Seite in die Normalform, hier die Form der Einheitsmatrix I.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

$$\overset{Zeilenumformungen}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \tilde{b}_{11} & * & \tilde{b}_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & * & & * \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{b}_{n1} & * & \tilde{b}_{nn} \end{array}\right)$$

Wir identifizieren $X = (x_{ij}) = (\tilde{b}_{ij})$.

2 Die inverse Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn eine andere Matrix $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, mit der Eigenschaft $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Für unitäre Matrizen ist offensichtlich $A^{-1} = A^{\dagger}$ (siehe Hilfe zum neuen Blatt). Erinnern wir uns an das LGS AX=B und setzen B=I. Es gilt X zu bestimmen. Das geht wie gehabt, indem wir die erweiterte Matrix $\{A|I\}$ auf Zeilennormalform bringen $\rightarrow IX = A^{-1}$.
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\
AX = I &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\vdots \\
IX = A^{-1} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \\
\Rightarrow A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Anstatt invertierbar kann man auch sagen, eine Matrix ist „regulär“. Ist sie nicht invertierbar, so ist sie „singulär“. Bringen wir eine $n \times n$-Matrix A auf Zeilennormalform, so erhalten wir offensichtlich nur bei Rang(A)=n eine eindeutige Inverse A^{-1}. Das ist gerade dann der Fall, wenn dim(Kern(A))=0. Es muss $det(A) \neq 0$ sein, damit A regulär. In der Praxis empfiehlt es sich X wie oben gezeigt direkt auszurechnen. Falls das Ergebnis eindeutig ist, ist A regulär und ihr habt auch schon direkt die Inverse $X = A^{-1}$ bestimmt.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Die Leibnizformel für Determinanten besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}.$$

Die Elemente der S_3 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\det(A) = +2\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot(-1) = -4.$$

Bemerkung: Diese Methode zur Berechnung der Determinente ist recht ineffizient und wird daher kaum genutzt.

b) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\big) - 2\big(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1\big) + 4\big(-1\cdot(-1) - 1\cdot 1\big) = -4. \end{aligned}$$

c) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte (vgl. 15.2 (b)) und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1) = -4.$$

Aufgabe 2

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.
[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(A) =_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \to Z_4 - Z_1]} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} \; 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} \; 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16.$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_4]} \; \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1, j=2,3,4]} \; \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} \; 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \; 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 3

Wir verwenden vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.
IA: $n = 2$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2} (x_k - x_j)\,.$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ beliebig. Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (y_k - y_j) \quad \text{für alle } y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (IV)}.$$

Seien nun $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

multiplizieren wir zuerst die vorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der letzten ab. Dann multiplizieren wir die vorvorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der vorletzten ab, usw. Die letzte Umformung besteht darin, das x_1-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abzuziehen. Für $k = n+1, n, \ldots, 3, 2$ ziehen wir also nacheinander das x_1-fache der $(k-1)$-ten Spalte von der k-ten Spalte ab. Im Anschluss entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \ldots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix}$$

Nun können wir aus der ersten Zeile dieser Matrix den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der zweiten Zeile $(x_3 - x_1)$ etc. und aus der letzten Zeile den Faktor $(x_{n+1} - x_1)$:

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1)}_{= \prod_{1 < l \leqslant n+1} (x_l - x_1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese $n \times n$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix. Gemäß Induktionsvoraussetzung mit $y_m = x_{m+1}$ (für $m = 1, 2, \ldots, n$) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_{k+1} - x_{j+1}) = \prod_{2 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 < l \leqslant n+1} (x_l - x_1) \cdot \prod_{2 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < l \leqslant n+1} (x_l - x_i).$$

Aufgabe 4

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach $\mathbb{C}$.
Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. [Verwende n-mal (D2)]

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1} A^\top A^2 A^\top A^{-1}) = (\det A)^2$.
Ja, denn für eine reguläre Matrix A gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz und der

Folgerung in 15.7

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}A^\top A^2 A^\top A^{-1}) &= \det(A^{-1})\ \det(A^\top)\ \det(A^2)\ \det(A^\top)\ \det(A^{-1})\\ &= \frac{1}{\det(A)}\ \det(A)\,(\det(A))^2\ \det(A)\,\frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^2\,.\end{aligned}$$

c) $\det(A+B) = \det A + \det B$?
Nein (außer für $n=1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A=0$).
Zum Beispiel ist $\det(I_2+I_2) = \det(2I_2) = 4\det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

d) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl (vgl. Erläuterung im **a)**-Teil).

Aufgabe 5

Mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ bezeichnen wir die Matrix des Gleichungssystems, mit b die rechte Seite. Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn A regulär ist; wegen

$$\det(A) =_{\left[\substack{Z_2\to Z_2+Z_1\\ Z_3\to Z_3-2Z_1}\right]} \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix} =_{[\text{Entw. nach } S_1]} \det\begin{pmatrix}5 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

ist dies der Fall. Nach der Cramerschen Regel gilt dann

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(A)}\,, \qquad x_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(A)}\,, \qquad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b\,)}{\det(A)}\,.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}x_1 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} &=_{[Z_3\to Z_3+Z_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} = -\frac{13}{15}\,.\end{aligned}$$

Auch bei x_2 und x_3 addieren wir jeweils die erste Zeile zur dritten und entwickeln dann nach der zweiten bzw. dritten Spalte:

$$x_2 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\,,$$

$$x_3 = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,.$$

Aufgabe 6

a) Wegen

$$\begin{aligned}\sigma\circ\pi(1) &= \sigma(\pi(1)) = \sigma(4) = 1, &\quad \sigma\circ\pi(2) &= \sigma(\pi(2)) = \sigma(3) = 4,\\ \sigma\circ\pi(3) &= \sigma(\pi(3)) = \sigma(2) = 2, &\quad \sigma\circ\pi(4) &= \sigma(\pi(4)) = \sigma(1) = 3\end{aligned}$$

ist

$$\sigma\circ\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\pi\circ\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

b) Um $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ zu bestimmen, vertauschen wir die obere Zeile von $\sigma \circ \pi$ mit der unteren Zeile und sortieren anschließend die Spalten so, dass die obere Zeile wieder korrekt dasteht:

$$(\sigma \circ \pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus

$$\pi^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt.

c) Eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, welche zwei Elemente j, k mit $1 \leqslant j < k \leqslant n$ vertauscht und die restlichen festlässt, heißt Transposition. Diese bezeichnen wir mit τ_{jk}, also

$$\tau_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & k & j+1 & \ldots & k-1 & j & k+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Um σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen zu schreiben, gehen wir schrittweise vor: Zunächst sorgen wir durch Vertauschen von 1 und 3 dafür, dass die 1 korrekt abgebildet wird. Dabei wird aber die 3 falsch positioniert (3 würde jetzt mit der 1 vertauscht werden, 3 soll aber auf 4 gehen), also stellt man im nächsten Schritt die 3 durch Vertauschen von 1 mit 4 richtig. Schließlich hat man soeben 4 mit 1 getauscht. Da auch die 2 korrekt abgebildet wird, ist man fertig und erhält als Endergebnis $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13}$.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, z.B. gilt auch $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13}$ oder $\sigma = \tau_{34} \circ \tau_{14}$.

Da σ als Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann, ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ nach Beispiel (2) in 15.6. Dies lässt sich natürlich auch anhand der Definition des Signums einsehen:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Die Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $i < j$ lauten

$$(1,2), \quad (1,3), \quad (1,4), \quad (2,3), \quad (2,4), \quad (3,4).$$

Daher ergibt sich für obiges Produkt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \frac{\sigma(4) - \sigma(1)}{4 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \frac{\sigma(4) - \sigma(2)}{4 - 2} \frac{\sigma(4) - \sigma(3)}{4 - 3} \\ &= \frac{2-3}{1} \frac{4-3}{2} \frac{1-3}{3} \frac{4-2}{1} \frac{1-2}{2} \frac{1-4}{1} = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(x \times y | x) = (\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf x als auch orthogonal auf y steht]. Für den Winkel φ, den die Vektoren x und y einschließen, gilt

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Hieraus folgt $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}\,.$$