Blatt 2

Tutorium HM 2

29. April 2009

Zur Theorie auf diesem Blatt: Es geht um Eigenwertgleichungen, das Diagonalisieren von Matrizen und orthonormale und unitäre Matrizen. Ich gehe zunächst auf die Theorie ein und versuche sie dann ein wenig zu motivieren. Das hier gewählte Beispiel sollte dabei nicht nur von den Physikern leicht zu verstehen sein.

1 Eigenwerttheorie (A1, A2, A5)

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) einer Matrix $A \in C^{n\times n}$, wenn es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, genannt Eigenvektor (EV), gibt mit

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ (A-\lambda I)\vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

Letzte Gleichung hat genau dann eine Lösung $\vec{v}$, wenn

$$det(a-\lambda I) = 0 \quad (\textbf{charakteristisches Polynom} \text{ in } \lambda)$$

, also $\vec{v} \in Kern(A-\lambda I)$.
Aus diesem charakteristischen Polynom lassen sich dann die Eigenwerte λ bestimmen. Die Vielfachheit der Nullstelle λ_i bezeichnet man als **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts $a(\lambda)$ (Beispiel $\lambda^2(\lambda-1)=0$, $\lambda=0$ hat a(λ)=2). Mit diesen lassen sich dann die Eigenvektoren aus dem LGS $(A-\lambda I)\vec{v}=0$ bestimmen. Zu einem bestimmten λ_i kann jedoch die Dimension von $Kern(A-\lambda_i I)$ auch größer als 1 sein. Man bezeichnet sie als **geometrische Vielfachheit** $g(\lambda_i)$. Für diese gilt stets $g(\lambda) \leq a(\lambda)$.

2 Diagonalisieren von Matrizen (A2)

Betrachten wir wieder die Eigenwertgleichung

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

im $\mathbb{R}^n$. Bildet die Menge an Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so können wir mit der Matrix $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ auch schreiben:

$$AS = S\Lambda$$

Das ist genau dann der Fall, falls für jeden EW die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen ist $(a(\lambda_i) = g(\lambda_i))$. Hierbei ist Λ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i als Hauptdiagonalelementen.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

, die sich ergibt durch $S^{-1}AS = \Lambda$. Die Bestimmung der Eigenwerte von A ermöglicht uns also die Bestimmung der Diagonalisierten Matrix (siehe A2).

3 Symmetrische und Hermitesche Matrizen (A8)

Eine Matrix A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\in \mathbb{C}^{n\times n}$) heißt **symmetrisch** (**hermitesch**), falls gilt $A^T = A$ ($A^\dagger = A$).
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$A^\dagger = (A^T)^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte einer symmetrischen (hermiteschen) Matrix sind reell. Die Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis ONB des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), die Matrix aus Eigenvektoren S ist also **orthogonal** (**unitär**), d.h. es gilt $A^TA = I$ ($A^\dagger A = I$). Und wir haben

$$S^TAS = \Lambda$$
$$S^\dagger AS = \Lambda$$

4 Orthonormalbasis (A8)

Die Menge $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ von Vektoren $\vec{b}_i \in \mathbb{C}^n$ bildet eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{C}^n$, wenn sie normiert ($||\vec{b}_i|| = 1$) und paarweise orthogonal zueinander stehen, bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Habe ich im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren vorgegeben, so kann ich diese mittels dem Gram-Schmidt-Verfahren orthonormieren (vielleicht kommt das auf einem der nächsten Blätter). Bei der Aufgabe 8 braucht ihr lediglich die Theorie vom letzten Blatt (Kreuzprodukt und Skalarprodukt: Vorsicht $\rightarrow$ das Kreuzprodukt ist eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

5 Motivation - Schwingungsanordnung

In Abbildung 1 seht ihr zwei Kugeln mit Masse m, die über eine Feder mit Federstärke k_2 miteinander verbunden und über zwei weitere Federn der Stärke k_1 an den Wänden befestigt sind. Analog kann man sich hier auch zwei koppelnde symmetrische Potentiale in der Atomphysik (bindende, antibindende Zustände) oder ein Schwingkreis in der Elektroynamik vorstellen. Das ist alles dasselbe und deshalb für jeden von euch in irgendeiner Weise relevant.
Beachte, dass x_i die Auslenkung der Masse i aus der Ruhelage beschreibt. Die newtonschen Bewegungsgleichungen sind dann

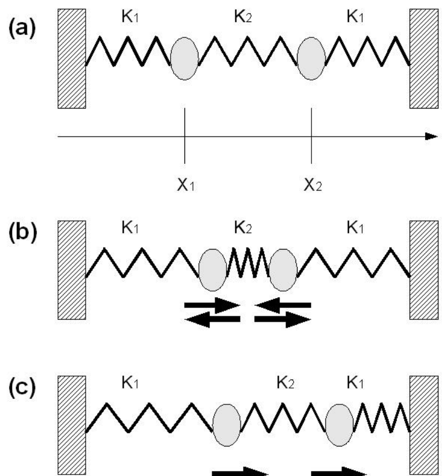

Abbildung 1: Gekoppelte Massen

$$m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

Wir können das ganze zusammenfassen durch

$$-\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} & \frac{-k_2}{m} \\ \frac{-k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Durch den Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ bringen wir das ganze auf eine Eigenwert-Gleichung mit Eigenwerten ω^2, die es zu bestimmen gilt.

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} & \frac{-k_2}{m} \\ \frac{-k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Gleichung der Form $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, deren Eigenwerte sich aus dem charakteristischen Polynom ergeben: $det(A - \lambda I) = 0$. Wir berechnen also:

$$det \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} - \omega^2 & \frac{-k_2}{m} \\ \frac{-k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega_\pm^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \pm \frac{k_2}{m}$$

Wir haben also zwei unterschiedliche Schwingungsmoden mit Frequenzen ω_+ und ω_-. Lösen wir nun mit den bekannten Eigenwerten ω^2 die Gleichung $(A - I\omega^2)\vec{x} = 0$, so erhalten wir die beiden Eigenvektoren

$$\vec{x}_+^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_-^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer höherfrequenten gegenphasigen Schwingung in Abbildung 1 (b) und einer niederfrequenten Schwingung in Phase in Abbildung (c). Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen ist also

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_+^0(a\, e^{i\omega_+ t} + b\, e^{-i\omega_+ t}) + \vec{x}_-^0(c\, e^{i\omega_- t} + d\, e^{-i\omega_- t})$$

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1\to Z_1-Z_2]} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[S_1\to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3\to Z_3-\frac{1}{2}Z_1]{Z_2\to Z_2-Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to\frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \operatorname{Kern}(A - 18I_3) = \{s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1\to Z_1+(1-\lambda)Z_3 \\ Z_2\to Z_2+2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Aufgabe 2

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 + S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_4]} (4-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 - S_3]} (4-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_3]} (4-\lambda)^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda) - 3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir x_4 beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \text{lin}\{c_1\}\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 - Z_1 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_1}]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \mathrm{lin}\{c_2, c_3, c_4\}\,, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als symmetrische Matrix diagonalisierbar. Da c_1 eine Basis von $E_A(0)$ und c_2, c_3, c_4 eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten c_1, c_2, c_3, c_4

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch ist, gibt es eine sogar orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um eine solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume.

Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist gegeben durch $b_1 := \dfrac{1}{\|c_1\|}\, c_1 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren (vgl. 14.21, HM I):

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{b}_3 := c_3 - (c_3|b_2)b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_3\|}\, \widetilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{b}_4 := c_4 - (c_4|b_2)b_2 - (c_4|b_3)b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_4\|}\, \widetilde{b}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bilden b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.
Besitzt die Matrix P die Spalten b_1, b_2, b_3, b_4, dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a,b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ -3+\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(\lambda - 2)^2.
\end{aligned}$$

[Schritte: erste Zeile von der zweiten abgezogen, erste Spalte zur zweiten addiert, dann nach der 2. Zeile entwickelt]

Wegen $\chi_M(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{2, 3\}$ besitzt M die Eigenwerte 2 mit zweifacher algebraischer Vielfachheit und 3 mit einfacher algebraischer Vielfachheit.

Eigenraum zu 2: Wegen

$$M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + 2Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$E_M(2) = \mathrm{Kern}(M - 2I_3) = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Eigenraum zu 3: Eine ähnliche Rechnung ergibt

$$E_M(3) = \mathrm{Kern}(M - 3I_3) = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C}\} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Da beide Eigenräume eindimensional sind, haben beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1.

c) M besitzt maximal zwei linear unabhängige Eigenvektoren, etwa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) M ist nicht diagonalisierbar, weil für den Eigenwert 2 die geometrische Vielfachheit ungleich der algebraischen Vielfachheit ist.

Alternative Begründung: M ist nicht diagonalisierbar, sonst müßte M drei linear unabhängige Eigenvektoren haben. *ODER AUCH:* M ist nicht diagonalisierbar, weil es keine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von M gibt (vgl. **c)**-Teil).

Aufgabe 4

Für jedes α ist die reelle Matrix A_α symmetrisch; nach dem Satz in 16.8 gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P$ Diagonalgestalt hat. Wir wissen zudem: Bei jedem derartigen P stehen in der Diagonale von $P^T A_\alpha P$ die Eigenwerte von A. Die Frage lautet also: Für welche α besitzt A_α die Eigenwerte 1, 2 und 3? Die Matrix

$$A_\alpha - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist (unabhängig von α) singulär; somit ist 1 stets ein Eigenwert von A_α. Wegen

$$A_\alpha - 2I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -3+\alpha \end{pmatrix}$$

ist 2 stets ein Eigenwert von A_α (unabhängig von α). Schließlich haben wir noch

$$A_\alpha - 3I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -5+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann singulär, wenn die erste und dritte Zeile linear abhängig sind, wenn also $-5+\alpha = 1-\alpha$ gilt, d. h. $\alpha = 3$. Somit hat A_α nur im Fall $\alpha = 3$ den Eigenwert 3.
Bemerkung: Nachdem wir gezeigt haben, dass 1 und 2 Eigenwerte von A_α sind, können wir bei der Untersuchung, wann die Matrix A_α die Eigenwerte $1, 2, 3$ besitzt, auch auf die Betrachtung von $A_\alpha - 3I_3$ verzichten und stattdessen mit Hilfe der Spur von A_α argumentieren. Da die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte (gemäß ihrer algebraischen Vielfachheiten wiederholt, vgl. Folgerung in 16.9) ist, erhalten wir

$$3 \text{ ist Eigenwert von } A_\alpha \iff \operatorname{Spur}(A_\alpha) = 6 \iff \tfrac{1}{2}\big((1+\alpha)+4+(1+\alpha)\big) = 6 \iff \alpha = 3.$$

Fazit: Genau für $\alpha = 3$ gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Setzen wir $\alpha = 3$ in die Matrizen ein, die wir oben erhalten haben, so können wir ablesen:

$$E_{A_3}(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(2) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(3) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Die Spalten der Matrix P sind dann normierte Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

a) Setze zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 5$$

ist 5 der einzige Eigenwert von A.

b) Setze zum Beispiel $B := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Gemäß Beispiel (2) in 16.1 sind a, b, c, d die Eigenwerte der Diagonalmatrix B. Nach Voraussetzung sind diese reell und paarweise verschieden.

c) Es ist $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Wegen $\chi_C(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, -1, 1, -2, 2\}$ sind $0, -1, 1, -2, 2$ die Eigenwerte von C.

Somit hat zum Beispiel $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die geforderte Eigenschaft.

d) Die Matrix $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt genau den Eigenwert 1. Der zugehörige Eigenraum ist $E_D(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, so dass D nur einen linear unabhängigen Eigenvektor hat.

Aufgabe 6

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. $v \in V \setminus \{0\}$ sei ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\varphi(v) = \lambda v$.

a) Es gilt $(\varphi + 5\,\mathrm{id}_V)(v) = \varphi(v) + 5\,\mathrm{id}_V(v) = \lambda v + 5v = (\lambda + 5)v$, d.h. v ist ein Eigenvektor von $\varphi + 5\,\mathrm{id}_V$ zum Eigenwert $\lambda + 5$.

b) Es ist $\varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$. Dass $\varphi^n(v) = \lambda^n v$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, zeigen wir mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$. $\varphi(v) = \lambda v$ gilt nach Voraussetzung.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\varphi^n(v) = \lambda^n v$ (IV). Dann folgt:

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi(\varphi^n(v)) \overset{\text{(IV)}}{=} \varphi(\lambda^n v) = \lambda^n \varphi(v) = \lambda^n \lambda v = \lambda^{n+1} v.$$

Damit ergibt sich für ein beliebiges Polynom $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$

$$p(\varphi)(v) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi^n(v) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n v = p(\lambda)v.$$

(Hierbei ist $\varphi^0 := \mathrm{id}_V$ gesetzt.) Also ist v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Sei $x \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von φ^2 zum Eigenwert μ^2, d.h. $\varphi^2(x) = \lambda^2 x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V) \circ (\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) &= (\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V)((\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x)) = (\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V)(\varphi(x) + \mu x) \\
&= \varphi(\varphi(x) + \mu x) - \mu(\varphi(x) + \mu x) \qquad (1) \\
&= \varphi(\varphi(x)) + \varphi(\mu x) - \mu\varphi(x) - \mu^2 x \\
&= \varphi^2(x) - \mu^2 x = 0.
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $(\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) = 0$, d.h. $\varphi(x) + \mu x = 0$.
Dann gilt $\varphi(x) = -\mu x$, d.h. x ist ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $-\mu$.

2. Fall: $(\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)(x) \neq 0$, d.h. $\varphi(x) + \mu x \neq 0$.
Aus (1) folgt $\varphi(\varphi(x) + \mu x) = \mu(\varphi(x) + \mu x)$. Daher ist $\varphi(x) + \mu x$ ($\neq 0$) ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert μ.

Aufgabe 7

a) Die Darstellungsmatrix A von φ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 lautet

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ bilden die Vektoren c_1, c_2, c_3 genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn sie linear unabhängig sind. Um die lineare Unabhängigkeit von c_1, c_2, c_3 zu zeigen, schreiben wir

$$c_1 := e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_2 := e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Spalten in eine Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und weisen nach, dass diese vollen Rang hat. Dazu berechnen wir die inverse Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \leftrightarrow -Z_3]{Z_2 \to -Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Da die Matrix mit den Spalten c_1, c_2, c_3 invertierbar ist, besitzt diese vollen Rang, so dass c_1, c_2, c_3 linear unabhängig sind.

Die Darstellungsmatrix $\widetilde{A}$ von φ bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 erhält man durch $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, wobei $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Darstellungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist, wenn man "vorne" die Basis c_1, c_2, c_3 und "hinten" die Basis e_1, e_2, e_3 nimmt, d.h. S bildet die Koordinaten eines Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 auf die Koordinaten von v bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 ab.

Die Koordinaten von c_1 bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 lauten $(1, 0, 0)$ und die Koordinaten von c_1 bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 lauten $(1, 1, 1)$. Folglich muss

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten, d.h. die erste Spalte von S ist gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entsprechende Überlegungen für c_2 und c_3 führen auf

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von S haben wir bereits zu Beginn bestimmt. Für die Darstellungsmatrix $\widetilde{A}$ von φ bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 ergibt sich

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -4 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Darstellung der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 lässt sich an der Matrix S^{-1} ablesen, weil S^{-1} der Darstellungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ entspricht, wenn man "vorne" die Basis e_1, e_2, e_3 und "hinten" die Basis c_1, c_2, c_3 nimmt. Deshalb ergibt sich

$$e_1 = c_1 + c_2 - c_3\,, \qquad e_2 = c_1 - c_3\,, \qquad e_3 = -c_1 - c_2 + 2c_3\,.$$

Aufgabe 8

a) Die beiden Vektoren haben offenbar Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander. Das Kreuzprodukt dieser Vektoren ist orthogonal zu beiden und hat zudem Norm 1 (denn $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren a und b ist). Wir wählen also

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

als dritten Vektor.

b) Auch hier gilt: Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$(z \mid \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}) = 0 \qquad \text{und} \qquad (z \mid \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}) = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor z müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.