UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
07.05.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{3}\, x_3 + 3 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x^T A x + 2b^T x + c = 0 \right\}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

c) Ermitteln Sie eine orthogonale Matrix V so, dass $V^T A V$ Diagonalgestalt besitzt.

d) Bestimmen Sie die Normalform von Q.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1}^n, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.
Zeigen Sie, dass durch $(x|y)_A := y^T A x$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle Funktionen y, die

$$y'(x) = y(x) \cdot \sin x \qquad \text{für alle } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

erfüllen.

b) Geben Sie alle auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen y an mit

$$y(x) = \int_0^x y(t)\, dt \qquad \text{für alle } x \in [-1,1].$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Ein Stromkreis bestehe aus einer Spule mit Induktivität L, einem Widerstand R und einem Wechselstromgenerator, der zur Zeit t die Spannung $u(t) = A\sin(\omega t)$ erzeuge ($\omega, A \in \mathbb{R}$). Nach den Kirchhoffschen Gesetzen gilt für die Stromstärke $i(t)$ zur Zeit t

$$i'(t) = -\frac{R}{L}\, i(t) + \frac{1}{L}\, u(t).$$

Bestimmen Sie $i(t)$ für $t > 0$ unter der Anfangswertbedingung $i(0) = 0$.

Aufgabe 6

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' = e^{x-y-e^y}\,, \quad y(1) = 0$ **b)** $xy(1+x^2)y' = 1 + y^2\,, \quad y(1) = 2$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall bzw. die Lösungen der Anfangswertprobleme.

a) $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3\,, \quad x \in (0,\infty)$ **b)** $y' + y\cos x = \sin x \cos x\,, \quad y(0) = 1$

c) $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\, y' = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie Fundamentalsysteme von

a) $y'' + 4y' - 5y = 0\,;$ **b)** $y'' - 6y' + 25y = 0\,;$ **c)** $y''' - y'' + y' - y = 0\,;$

d) $y^{(4)} - y''' + 4y'' - 4y' = 0\,;$ **e)** $y^{(4)} + y = 0\,.$

Aufgabe 9

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v. \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie damit die Lösungen des Systems (1).

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3, 7, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.