Blatt 3

Tutorium HM 2

7. Mai 2009

Auf diesem Blatt geht es um Quadriken, eine Möglichkeit der Beschreibung von (n-1)-dimensionalen Oberflächen im $\mathbb{R}^n$. Ein wichtiger Begriff, der in diesem Zusammenhang auftaucht ist der der Definitheit von Matrizen. Diesen Begriff will ich zunächst motivieren, bevor ich auf die Quadriken zu sprechen komme. Ein weiteres Thema sind gewöhnliche Differentialgleichungen. Ich will verschiedene Ansätze vorstellen, mit denen die Aufgaben gelöst werden können.

1 Motivation

So langsam nähern wir uns dem Thema Funktionen mehrerer Veränderlicher. D.h. wir haben z.B. eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kurz $f(x, y)$, deren lokales Verhalten wir hinsichtlich Extrema untersuchen wollen. Wie im Eindimensionalen Fall kann auch f in eine Taylorreihe um einen Punkt (x_0, y_0) entwickelt werden. Diese hat als erste Komponenten

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = f(x_0,y_0) \\
&+ (\partial_x f(x_0,y_0),\, \partial_y f(x_0,y_0)) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}(x - x_0,\, y - y_0) \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f & \partial_x\partial_y f \\ \partial_y\partial_x f & \partial_y\partial_y f \end{pmatrix}_0}_{H} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&+ ...
\end{aligned}$$

Die Matrix H heißt hier Hessematrix. Was hier wichtig ist verät ein Blick auf die HM I. Eine Funktion g(x) hat ein Extremum an einer Stelle, wenn die Ableitung an dieser verschwindet: $\partial_x g(x)|_{x_0} = 0$. Auskunft darüber, ob es sich um ein Minimum, Sattelstelle oder Maximum handelt, gibt hier die zweite Ableitung von g an der Stelle x_0. Ist $\partial_x\partial_x g(x)|_{x_0} > 0$, so haben wir z.B. ein Minimum vorliegen. Ähnlich ist dies bei der Funktion $f(x, y)$ mit zwei veränderlichen. Hier liegt ein „stationärer“ Punkt (Extrem- oder Sattelstellte), wenn der Gradient von f an der Stelle (x_0, y_0) verschwindet.

$$\begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\textit{stationrer Punkt } (x_0, y_0)$$

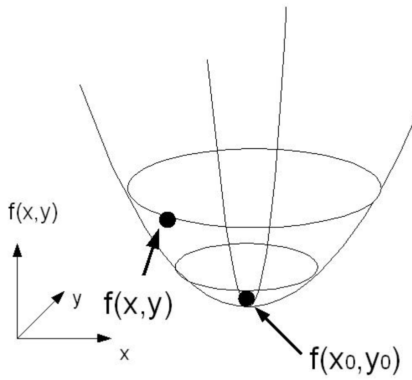


Abbildung 1: Minimum von f(x,y)

Damit also mit $f(x,y)-f(x_0,y_0) > 0$ ein Minimum vorliegt, muss der Term in nächster Ordnung

$$\frac{1}{2}(x - x_0,\ y - y_0)H \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} > 0$$

sein. Man sagt H ist positiv definit.

2 Definitheit (A2)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv definit** (**negativ definit**), wenn mit einem beliebiegen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} &> 0 \quad (\textbf{pos.} \quad \textbf{deifinit}) \\ &< 0 \quad (\textbf{neg.} \quad \textbf{definit}) \end{aligned}$$

A heißt **indefinit**, wenn sowohl negative als auch positive Werte von Q angenommen werden. Im Fall $Q(\vec{x}) \geq 0 \, (\leq 0)$ nennt man A **positiv semidefinit** (**negativ semidefinit**).
Man kann die Quadrik $Q(\vec{x})$ auch so umformen, dass eine beliebige Matrix A symmetrisch wird, so dass $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T B \vec{x}$ mit $B = B^T$.
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
Q(\vec{x}) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + 2x_2x_1 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\
&= x_1^2 + 3x_2x_1 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 \\
&= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Jede Aussage, die wir bzgl. der Definitheit einer Matrix treffen, kann also auf den Fall einer symmetrischen Matrix ($A = A^T$) reduziert werden.
Wir erinnern uns, dass man eine symmetrische Matrix A auf Diagonalgestalt transformieren kann mit einer Matrix S aus orthonormierten Eigenvektoren zu A.

$$AS = S\Lambda \Rightarrow \Lambda = S^T AS$$

Hierbei war $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit den Eigenwerten λ_i. Eine Diagoalmatrix ist ganz offensichtlich positiv (negativ) definit, wenn alle Diagonalelemente größer (kleiner) null sind. Für positive Definitheit musste $Q(\vec{x}) > 0$ sein für ein beliebiges $\vec{x}$. Wählen wir also für $A = A^T$ ein $\vec{y} = S\vec{x}$, so erhalten wir

$$Q(\vec{y}) = (S\vec{x})^T AS\vec{x} = \vec{x}^T S^T AS\vec{x} = \vec{x}^T \Lambda \vec{x}.$$

Sind also z.B. alle Eigenwerte von A $\lambda_i > 0$, so ist A positiv definit. Zusammengefasst:

A heißt

$$
\begin{aligned}
positiv\ definit &\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \\
positiv\ semidefinit &\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \\
negativ\ definit &\Leftrightarrow \lambda_i < 0 \\
negativ\ semidefinit &\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0
\end{aligned}
$$

für alle $i = 1, ..., n$. Sonst ist A indefinit.

Es gibt aber noch eine zweite Methode zur Überprüfung der Definitheit, nämlich die von Jacobi:
Eine Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit, wenn die Determinanten der Hauptuntermatrizen A_i positiv sind

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

, für $k = 1, ..., n$. (Ohne allgemeinen Beweis)
Bespiel für n=2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{d+a}{2} \pm \sqrt{\frac{(d+a)^2}{4} - (ad - b^2)}$$

Wir sehen: Ist $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$, so ist A positiv definit, ...

3 Quadriken (A1)

Wir betrachten quadratishe Polynome Q: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + \vec{c} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0$$

Wir wollen Q auf die einfachere Form $\tilde{a}_1 y_1^2 + \tilde{a}_2 y_2^2 + ... b_1 y_1 + ... + c = 0$ bringen. Die Idee: symmetrische Matrix A konstruieren $\to$ Transformation, so dass $A \to \Lambda$ Diagonalgestalt hat.
Also:

1. Die in x_i, x_j quadratischen Terme werden in einer Diagonalmatrix zusammengefasst. Beachte

$$a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_j x_i$$

2. Berechne Matrix S aus orthonormierten Eigenvektoren und führe Transformation $\vec{y} = S\vec{x}$ ein:

$$\begin{aligned} Q(\vec{y}) &= (S\vec{y})^T AS\vec{y} + \vec{b}^T S\vec{y} + c \\ &= \vec{y}^T S^T AS\vec{y} + (S^T\vec{b})^T \vec{y} + c \\ &= \vec{y}^T \underbrace{\Lambda}_{diag(\lambda_1,...,\lambda_n)} \vec{y} + \underbrace{(S^T\vec{b})^T}_{=:(\tilde{b}_1,...\tilde{b}_n)} \vec{y} + c \\ &= \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 + \tilde{b}_1 y_1 + ... + \tilde{b}_n y_n + c = 0 \end{aligned}$$

3. Quadratische Ergänzung für $\lambda_i \neq 0$:

$$\lambda_i y_i^2 + \tilde{b}_i y_i = \lambda_i \left(y_i^2 + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} y_i \right)$$
$$= \lambda_i \left(y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i}$$

Definiere also

$$z_i := \begin{cases} y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} & \lambda_i \neq 0 \ (i = 1, ..., k) \\ y_i & \lambda_i = 0 \ (i = k+1, ..., n) \end{cases}$$

Also erhalten wir mit der Konstante $\tilde{c} = c - \sum_{m=1}^{k} \frac{\tilde{b}_m^2}{4\lambda_m}$

$$Q(\vec{z}) = \lambda_1 z_1^2 + ... + \lambda_k z_k^2 + \tilde{b}_{k+1} z_{k+1} + ... + \tilde{b}_n z_n + \tilde{c} = 0$$

Toll! Und was bringt uns das nun? Wir können diese Form wesentlich einfacher geometrisch deuten. Ist es nun ein Ellipsoid, ein Paraboloid, ein hyperbolischer Zylinder, ...? Die Kriterien für die einzelnen Formen findet ihr gut zusammengefasst im Repetetorium der HM auf Seite 240. Eine gute grapische Veranschaulichung liefert der Meyberg-Vachenauer (S.344, sechte Auflage).
Kurzes Beispiel:

$$x^2 + y^2 - 3z = 0$$

beschreibt ein elliptischen Paraboloid, wie er in Abb. 1 zu sehen ist.

4 Differentialgleichungen (A5, A6)

Zu diesem Thema gibt es sehr viele verschiedene Herangehensweisen, v.a. dann, wenn man die Anzahl der Veränderlichen erhöht (partielle DGL). Ich beginne mit einer euch bekannten Motivation und gehe dann über zu zwei Ansätzen zum Lösen der hier gegebenen DGL.

4.1 Motivation

Ein wenig Elektrodynamik: Betrachten wir einen geschlossenen Stromkreis, so bleibt die Ladung innerhalb von diesem erhalten. In der Elektrodynamik wird diese Tatsache ausgedrückt durch die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0.$$

Hierbei ist $\vec{j}$ die Stromdichte („Strom / Fläche")und ϱ die Ladungsdichte („Ladung / Volumen"). Im stationären Fall ($\partial_t \varrho = 0$) gilt:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Greifen wir uns einen Knotenpunkt in dem Netzwerk heraus und betrachten diesen als ein Volumenelement ΔV, so besagt obige Gleichung, dass pro Zeiteinheit genauso viel Ladung in ΔV herein, wie herausfließt, denn (Satz von Gauß kommt noch in der VL)

$$\int d^3\vec{x} \nabla \cdot \vec{J} = \oint d\sigma \hat{n} \cdot \vec{J} = \sum_i I_i = 0$$

mit Oberflächenelement σ. Diese **„Knotenregel"** angewandt auf den ersten Knoten liefert z.B. $I - I_1 - I_2 = 0$. Desweiteren braucht ihr noch die „Maschenregel". Aus den Maxwell-Gleichungen erhaltet ihr im stationären Fall aus $\nabla \times \vec{E} = 0$ und dem Satz von Stokes (kommt auch noch) die Bedingung:

$$\oint_{\varsigma_1} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \oint_{\varsigma_2} d\vec{x} \cdot \vec{E}$$

für zwei unterschiedliche Wege ς_1 und ς_2. Da obige Gleichung aber gerade die Spannung definiert, folgt die Bedingung, dass die über einem geschlossenen Kreis (Masche) abfallenden Spannungen (z.B. an Widerständen) in Summe gleich null sein müssen:

$$\sum_i U_i = 0 \quad (\textbf{Maschenregel})$$

Abbildung 2: LR-Schaltkreis

Betrachten wir den Schaltkreis in Abbildung 2, so ergibt sich nach der Maschenregel

$$U(t) + U_L + U_R = 0$$

Hierbei ist U_L die über die Induktivität (Spule), U_R die über den Wiederstand abfallende Spannung, die mit dem durch den Kreis fließenden Strom I folgender maßen in Beziehung stehen:

$$U_L = -L\,\frac{d}{dt}I = L\,\dot{I}$$
$$U_R = -R\,I$$

Diese Beziehungen ergeben sich aus den Maxwell-Gleichungen. Wir erhalten damit eine lineare DGL erster Ordnung in I:

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L}I(t) + \frac{1}{L}U(t) \qquad \text{(siehe A5)}$$

Wie können wir diese lösen?

4.2 DGL mit getrennten Variablen

Eine DGL der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

nennt man eine DGL mit getrennten Variablen, die gelöst werden kann, indem man nach Termen in x bzw. y sortiert und danach integriert. Beispiel g(y)=y:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= f(x) \\
\int_0^x d\tilde{x}\,\frac{y'(\tilde{x})}{y(\tilde{x})} &= \int_{y(x_0)}^{y(x)} dy\,\frac{1}{y} \\
&= \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x}) \\
\Leftrightarrow ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) &= \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x}) \\
\Leftrightarrow y(x) &= y_0\, exp(\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x})) =: y_h(x) \quad (*)
\end{aligned}$$

4.3 Variation der Konstanten

Haben wir in obiger DGL noch einen inhomogenen Term $b(x)$ stehen, d.h.

$$y' = f(x)g(y) + b(x) \quad (**),$$

so können wir von der homogenen Lösung $y_h(x)$ $(*)$ ausgehend den Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = c(x)\, y_h(x)$$

machen, der sich „Variation der Konstanten nennt. Eingesetzt in (∗∗) ergibt sich die neue DGL

$$y'(x) = c'(x)\, y_h(x) + \underline{c(x)\, y_h'(x)} = \underline{f(x)\, c(x)\, y_h(x)} + b(x)$$
$$c'(x) = \frac{b(x)}{y_h(x)}$$

Die eindeutige Lösung des Problems ist dann gegeben durch:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_h(x) + y_h(x) \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} \frac{b(\tilde{x})}{y_h(\tilde{x})}.$$

4.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Hier will ich nur das Beispiel einer linearen DGL 2ter Ordnung bringen. Die Verallgemeinerung ist einfach und schon in der VL geschehen. Das Problem: Ihr habt eine DGL der Form:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ein Ansatz diese DGL zu lösen wäre $y = e^{\lambda x}$. Damit erhalten wir:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Damit wäre die Lösung des Problems gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x},$$

unter der Voraussetzung, dass $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Wenn $\lambda_+ = \lambda_-$, muss man sich neben der Lösung $y_1(x) = c_1 e^{\lambda x}$ noch eine weitere Lsg. konstruieren, so dass man ein vollständiges Lösungssystem erhält. Das geht am besten über die Variation der Konstanten. Der Ansatz $y_2(x) = c(x)\, y_1(x)$ führt dann auf die Gleichung $c'(x) = const.$ und damit $y_2(x) \propto x e^{\lambda x}$. Also wäre in diesem Fall die allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2\, x\, e^{\lambda x}$$

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ können wir die Quadrik-Gleichung $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{3}\,x_3 + 3 = 0$ in der Form

$$x^T A x + 2b^T x + c = 0\,, \quad \text{wobei} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad c := 3\,,$$

schreiben.

b) Zur Bestimmung der Eigenwerte von A berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + \lambda Z_2 \\ Z_3 \to Z_3 + Z_2}\right]} \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & \lambda - 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} -\det \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & \lambda-1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\big((1-\lambda^2)(1-\lambda) + (1-\lambda)^2\big)$$

$$= -\big((1+\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2\big) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda+1) = -(1-\lambda)^2(2+\lambda).$$

Die Matrix A hat also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$A + 2I_3 \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_2]{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_1]{Z_2 \to Z_2 + \frac{2}{3} Z_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{3} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$ der Eigenraum

$$E_A(-2) = \operatorname{lin}\{c_1\}\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 1$ betrachten wir

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich der zweidimensionale Eigenraum

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\{c_2, c_3\}\,, \qquad \text{wobei} \quad c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A können wir via $v_1 := \frac{1}{\|c_1\|}\, c_1$, $v_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2$ und $v_3 := v_1 \times v_2$ definieren. Dann gilt $V^T A V = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: D$ bzw. $A = VDV^T$ für die orthogonale Matrix

$$V := (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \det V = 1.$$

d) Zur Bestimmung der Normalform betrachten wir das lineare Gleichungssystem $-Ap = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 & -\sqrt{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3]{Z_2 \to Z_2 - \frac{1}{2} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right).$$

Folglich besitzt $-Ap = b$ die eindeutige Lösung $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1, -1, -1)$. Damit sind die neuen Koordinaten $y = (y_1, y_2, y_3)$ gegeben durch $x = Vy + p$, also durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

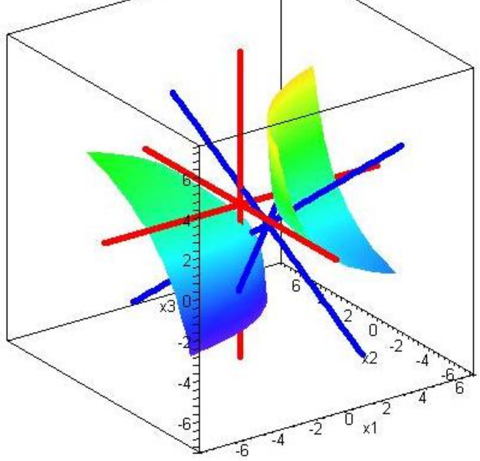
Wegen

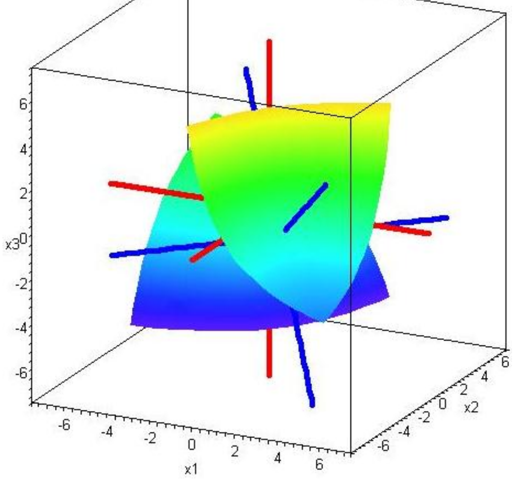
$$b^T p + c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

erhalten wir als Gleichung der Quadrik Q in den neuen Koordinaten y

$$-2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\left(\frac{y_1}{\sqrt{3/4}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Q ist ein sog. zweischaliges Hyperboloid. Die Hauptachsen sind $p + \mathrm{lin}\{v_1\}$, $p + \mathrm{lin}\{v_2\}$, $p + \mathrm{lin}\{v_3\}$. Auf den Schaubildern ist die Quadrik nach der Hauptachsentransformation aus verschiedenen Perspektiven abgebildet. Die Hauptachsen sind dabei blau, die ursprünglichen Koordinatenachsen rot.





Aufgabe 2

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium von Hurwitz aus 16.10. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für $x := e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad x^T Bx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $y := e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$By = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad y^T By = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass B nicht positiv definit ist, kann man auch mit dem Kriterium von Hurwitz argumentieren: Da für die zweite Hauptunterdeterminante $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$ gilt, ist B nicht positiv definit.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiere $(x|y)_A = y^T Ax \in \mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass $(\cdot|\cdot)_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist, sind nachzuweisen

(S1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $(x|y)_A = (y|x)_A$,
(S2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha x + y|z)_A = \alpha(x|z)_A + (y|z)_A$,
(S3) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $(x|x)_A > 0$.

Zu (S1): Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen der Symmetrie von A (d.h. $A = A^T$)

$$(x|y)_A = y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T A^T (y^T)^T = x^T Ay = (y|x)_A.$$

Zu (S2): Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\alpha x + y|z)_A = z^T A(\alpha x + y) = \alpha z^T Ax + z^T Ay = \alpha(x|z)_A + (y|z)_A.$$

Zu (S3): Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $(x|x)_A = x^T Ax > 0$, weil A positiv definit ist.

Aufgabe 4

a) Gemäß Beispiel (1) in 17.3 [mit $a(x) = \sin x$] ist jede Lösung von $y'(x) = y(x) \cdot \sin x$ gegeben durch $y(x) = ce^{-\cos x}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Dass dies tatsächlich alle Lösungen sind, kann man auch folgendermaßen einsehen: Ist w eine weitere Funktion, die der Gleichung $w'(x) = w(x) \cdot \sin x$ genügt, so gilt

$$\left(\frac{w(x)}{y(x)}\right)' = \frac{w'(x)y(x) - w(x)y'(x)}{y^2(x)} = \frac{w(x)\sin(x)y(x) - w(x)y(x)\sin(x)}{y^2(x)} = 0.$$

Der Quotient w/y ist also konstant, d.h. es gilt $w(x) = Cy(x)$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Differentiation der Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung liefert für jedes $x \in (-1, 1)$

$$y'(x) = y(x).$$

(Beachte: y ist differenzierbar, weil die rechte Seite $x \mapsto \int_0^x y(t)\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar ist.)

Laut Beispiel (1) in 17.3 [mit $a(x) = 1$] ist $y(x) = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Gemäß der ursprünglichen Gleichung gilt insbesondere für $x = 0$: $c = y(0) = \int_0^0 y(t)\,dt = 0$, d.h. nur $y(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllt die gegebene Gleichung.

Aufgabe 5

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} i'(t) &= -\frac{R}{L}\,i(t) + \frac{1}{L}\,u(t), \\ i(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

lösen wir mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 17.4 [mit $y = i$, $x = t$, $x_0 = y_0 = 0$, $I = [0, \infty)$, $a(x) = -\frac{R}{L}$, $b(x) = b(t) = \frac{1}{L}\,u(t) = \frac{A}{L}\,\sin(\omega t)$]. Danach ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 \cdot e^{\int_0^t -\frac{R}{L}\,d\tau} + e^{\int_0^t -\frac{R}{L}\,d\tau} \cdot \int_0^t e^{-\int_0^\tau -\frac{R}{L}\,ds}\,\frac{A}{L}\,\sin(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{A}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0, \infty). \end{aligned} \tag{2}$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau &= \left[e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{-\cos(\omega\tau)}{\omega}\right]_{\tau=0}^t + \int_0^t \frac{R}{L}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\cos(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\cos(\omega\tau)\,d\tau \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\left(\left[e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\right]_{\tau=0}^t - \int_0^t \frac{R}{L}\,e^{\frac{R}{L}\tau}\,\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau\right) \\ &= -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{R}{\omega L}\,e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

woraus

$$\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau = -e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{R}{\omega^2 L}\,e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)$$
$$= \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\omega^2 L}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{1}{\omega}$$

bzw.

$$\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau = \frac{\frac{1}{\omega^2 L}}{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}\,e^{\frac{R}{L}t}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{\frac{1}{\omega}}{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}$$
$$= \frac{L}{\omega^2L^2+R^2}\,e^{\frac{R}{L}t}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}$$

folgt. Einsetzen in (2) ergibt für $t \geqslant 0$

$$i(t) = \frac{A}{\omega^2L^2+R^2}\big(R\sin(\omega t)-\omega L\cos(\omega t)\big)+\frac{\omega AL}{\omega^2L^2+R^2}\,e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Aufgabe 6

a) Die gegebene Differentialgleichung $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$ ist eine Gleichung mit getrennten Veränderlichen. Das Anfangswertproblem $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$, $y(1) = 0$ lösen wir mit der in Abschnitt 17.3 vorgestellten Methode $[f(x) = e^x,\ g(y) = e^{-y}e^{-e^y},\ x_0 = 1,\ y_0 = 0]$. Wegen $g(y_0) = e^{-1} \neq 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$\int_0^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für das Integral auf der linken Seite ergibt sich

$$\int_0^{y(x)} e^{\eta}e^{e^{\eta}}\,d\eta = \big[e^{e^{\eta}}\big]_{\eta=0}^{y(x)} = e^{e^{y(x)}}-e,$$

das Integral auf der rechten Seite ist gleich

$$\int_1^x f(t)\,dt = \big[e^t\big]_{t=1}^x = e^x - e.$$

Dies führt auf $e^{e^{y(x)}} = e^x$. Somit ist $y(x) = \ln(\ln(e^x)) = \ln x$ die auf $(0,\infty)$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

b) Die Gleichung lässt sich für $x \neq 0$ in der Form

$$y' = \frac{1+y^2}{y}\,\frac{1}{x(1+x^2)}$$

schreiben. Es handelt sich um getrennte Veränderliche mit

$$g(y) = \frac{1+y^2}{y}, \qquad f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Die Lösung y des Anfangswertproblems ist gegeben durch (Beachte: $g(2) = 5/2 \neq 0$)

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für den Integranden auf der rechten Seite gilt

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2},$$

und damit bekommt man für das Integral der rechten Seite

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}\,dt = \big[\ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\big]_1^x = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Außerdem gilt

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_2^{y(x)} \frac{\eta}{1+\eta^2}\,d\eta = \big[\tfrac{1}{2}\ln(1+\eta^2)\big]_2^{y(x)} = \tfrac{1}{2}\ln(1+y(x)^2) - \tfrac{1}{2}\ln 5.$$

Gleichsetzen der Integrale und Multiplikation mit 2 liefert

$$\ln(1+y(x)^2) = \underbrace{2\ln|x|}_{=\ln x^2} - \ln(1+x^2) + \underbrace{\ln 2 + \ln 5}_{=\ln 10}$$

bzw.

$$1 + y(x)^2 = e^{\ln x^2} \cdot \frac{1}{e^{\ln(1+x^2)}} \cdot e^{\ln 10} = \frac{10x^2}{1+x^2}.$$

Die Lösung ist somit

$$y(x) = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1} = \sqrt{\frac{9x^2-1}{1+x^2}}\,,$$

und zwar für $x > \frac{1}{3}$. (Dabei ergibt sich das Vorzeichen der Wurzel aus $y(1) = 2 > 0$.)

Aufgabe 7

a) Bei dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$x^3y' + (2-3x^2)y = 0, \qquad \text{also} \qquad y' = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right)y \quad \text{auf } (0,\infty)\,.$$

Diese besitzt die Lösungen $y(x) = Ce^{A(x)}$, wobei C ganz $\mathbb{R}$ durchläuft und A irgendeine Stammfunktion von $a(x) := -2/x^3 + 3/x$ ist. Dies bedeutet für $x > 0$

$$y(x) = C\exp\big(x^{-2} + 3\ln x\big) = Cx^3e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Eine spezielle Lösung y_{p} der inhomogenen Gleichung $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$ verschaffen wir uns mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)y_{\mathrm{h}}(x)$ mit $y_{\mathrm{h}}(x) := x^3e^{1/x^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x^3y_{\mathrm{p}}' + (2-3x^2)y_{\mathrm{p}} &= x^3\big(C'(x)y_{\mathrm{h}} + C(x)y_{\mathrm{h}}'\big) + (2-3x^2)C(x)y_{\mathrm{h}} \\ &= x^3C'(x)y_{\mathrm{h}} + \big(x^3y_{\mathrm{h}}' + (2-3x^2)y_{\mathrm{h}}\big)C(x) = x^3C'(x)y_{\mathrm{h}}\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass y_{h} die homogene Gleichung löst. Damit y_{p} die inhomogene Gleichung löst, muss mithin $x^3C'(x)y_{\mathrm{h}} = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_{\mathrm{h}}(x) = x^{-3}e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist z.B. für $C(x) = \frac{1}{2}e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich $y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}x^3$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf $(0,\infty)$ ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + Cy_{\mathrm{h}}(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + Cx^3e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

b) Die zugehörige homogene Gleichung $y' = (-\cos x)y$ hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = C \exp\Big(-\int \cos x \, dx\Big) = Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Um eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = C(x)e^{-\sin x}$ (Variation der Konstanten). Dann haben wir

$$y_\mathrm{p}' + y_\mathrm{p} \cos x = \big(C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos x\big) + C(x)e^{-\sin x} \cos x = C'(x)e^{-\sin x}.$$

Somit ist y_p eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $C'(x)e^{-\sin x} = \sin x \cos x$ gilt, d. h. wir suchen eine Funktion C mit

$$C'(x) = (\sin x \cos x)e^{\sin x}.$$

Partielle Integration (mit $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$) liefert

$$C(x) = (\sin x)e^{\sin x} - \int (\cos x)e^{\sin x} \, dx = (\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x}.$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir damit

$$y_\mathrm{p}(x) = C(x)e^{-\sin x} = \sin x - 1,$$

und die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung lautet dann

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + Ce^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Hier gilt $y(0) = -1 + C$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist daher für $C = 2$ erfüllt; das Anfangswertproblem hat folglich die Lösung $y(x) = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

Bemerkung: Man könnte hier natürlich auch die Variation-der-Konstanten-Formel aus Abschnitt 17.4 verwenden.

c) Hier handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\, y' = 0$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \tfrac{9}{4}\,\lambda = \lambda\big(\lambda^2 + 3\lambda + \tfrac{9}{4}\big) = \lambda\big(\lambda + \tfrac{3}{2}\big)^2$$

besitzt die einfache Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und die zweifache Nullstelle $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Somit ist ein Fundamentalsystem von $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\, y' = 0$ gegeben durch

$$e^{0 \cdot x}, \ e^{-\frac{3}{2}x}, \ xe^{-\frac{3}{2}x}$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\, y' = 0$ lautet

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + c_3 x e^{-\frac{3}{2}x} \qquad \text{für Konstanten } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\tfrac{3}{2}c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + c_3 e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{3}{2}c_3 x e^{-\frac{3}{2}x}, \\ y''(x) &= \tfrac{9}{4}c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 3c_3 e^{-\frac{3}{2}x} + \tfrac{9}{4}c_3 x e^{-\frac{3}{2}x}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0, \\ y'(0) &= -\tfrac{3}{2}c_2 + c_3 \stackrel{!}{=} 0, \\ y''(0) &= \tfrac{9}{4}c_2 - 3c_3 \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in c_1, c_2, c_3, welches die eindeutige Lösung $c_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = -\frac{4}{9}, c_3 = -\frac{2}{3}$ besitzt. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{9}e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{2}{3}xe^{-\frac{3}{2}x}.$$

Aufgabe 8

a) Das charakteristische Polynom der Gleichung $y''+4y'-5y=0$, also $\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda+5)$, besitzt die einfachen Nullstellen 1 und -5. Daher ist $e^x,\ e^{-5x}$ ein Fundamentalsystem, d.h. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-5x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, ist die allgemeine Lösung von $y''+4y'-5y=0$.

b) Hier lautet das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2-6\lambda+25$. Dieses hat die einfachen Nullstellen $3\pm4i$. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $e^{3x}\sin(4x),\ e^{3x}\cos(4x)$, so dass die allgemeine Lösung von $y''-6y'+25y=0$ durch $y(x)=c_1e^{3x}\sin(4x)+c_2e^{3x}\cos(4x)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, gegeben ist.

c) Das charakteristische Polynom von $y'''-y''+y'-y=0$ ist $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)$. Da dieses die einfachen Nullstellen $1,-i,i$ besitzt, ist $e^x,\ \sin x,\ \cos x$ ein zugehöriges Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung von $y'''-y''+y'-y=0$ lautet folglich $y(x)=c_1e^x+c_2\sin x+c_3\cos x$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

d) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ lautet $\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)$ und besitzt die einfachen Nullstellen $0,1,-2i,2i$. Deshalb ist $1,\ e^x,\ \sin(2x),\ \cos(2x)$ ein Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung von $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ ergibt sich $y(x)=c_1+c_2e^x+c_3\sin(2x)+c_4\cos(2x)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

e) Hier ist das charakteristische Polynom gleich λ^4+1. Aufgrund von

$$\begin{aligned}
\lambda^4=-1 \quad&\iff\quad \lambda^2=i \text{ oder } \lambda^2=-i \quad\iff\quad \lambda^2=e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ oder } \lambda^2=e^{-i\frac{\pi}{2}}\\
&\iff\quad \lambda=e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{-i\frac{\pi}{4}}\\
&\iff\quad \lambda=\tfrac{1+i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1-i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{1-i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1+i}{\sqrt2}
\end{aligned}$$

sind $\frac{1+i}{\sqrt2},\frac{-1+i}{\sqrt2},\frac{1-i}{\sqrt2},\frac{-1-i}{\sqrt2}$ die (einfachen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit ist $e^{x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2),\ e^{x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2),\ e^{-x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2),\ e^{-x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$ ein Fundamentalsystem von $y^{(4)}+y=0$ und die allgemeine Lösung lautet $y(x)=c_1e^{x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)+c_2e^{x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)+c_3e^{-x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)+c_4e^{-x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 9

Das System

$$\begin{aligned}u'&=8u-6v,\\ v'&=9u-7v\end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}8&-6\\9&-7\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix}8-\lambda&-6\\9&-7-\lambda\end{pmatrix}=(8-\lambda)(-7-\lambda)+9\cdot6=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1=-1$ und $\lambda_2=2$ die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1)=\mathrm{Kern}(A+I_2)=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}9&-6\\9&-6\end{pmatrix}=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}3&-2\\0&0\end{pmatrix}=\mathrm{lin}\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\}$$

und

$$E_A(2)=\mathrm{Kern}(A-2I_2)=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}6&-6\\9&-9\end{pmatrix}=\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\mathrm{lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}.$$

Da die Eigenvektoren $(2,3),(1,1)$ von A eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, ist A diagonalisierbar und für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Außerdem ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \qquad &\iff \qquad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \;\text{ und }\; \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\iff \qquad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \;\text{ und }\; \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (3).