UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
14.05.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungen bzw. des Anfangswertproblems.

a) $y''' - y = 1 + x^2$

b) $y'' - y = xe^{2x}$

c) $y'' - y = xe^x\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

d) $y''' - 4y'' + 3y' = 2\cos x + 4\sin x$

Aufgabe 2

Die 2π-periodischen Funktionen f, g und h sind gegeben durch

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{2}x^2 & (-\pi \leqslant x < \pi), & f(x+2\pi) = f(x), \\ g(x) = 1 + x + |x| & (-\pi \leqslant x < \pi), & g(x+2\pi) = g(x), \\ h(x) = \cos(\frac{1}{2}x) & (-\pi \leqslant x < \pi), & h(x+2\pi) = h(x). \end{array}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen in reeller und komplexer Form.

Aufgabe 3

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{für } x \in [-\pi, 0)\,, \\ \beta x & \text{für } x \in [0, \pi)\,, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion f.

b) Welchen Bedingungen müssen α und β genügen, damit die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe ist?

c) Geben Sie (in Abhängigkeit von den Parametern α und β) an, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt wird.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine

a) Cosinusreihe,

b) Sinusreihe.

Hinweis: Sie müssen die Funktion f jeweils unterschiedlich fortsetzen.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Bestimmen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 4) die Werte der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,.$$

Aufgabe 6

Ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ die Fourierreihe einer 2π-periodischen, über $[-\pi, \pi]$ integrierbaren Funktion?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Besselschen Ungleichung.

Aufgabe 7

Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $T \in (0, \infty)$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei T-periodisch sowie über jedem beschränkten und abgeschlossenen Intervall integrierbar. Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \qquad \text{sowie} \qquad \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx.$$

Hinweis: Substituieren Sie geeignet.

Aufgabe 8

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Nach dem Darstellungssatz in 18.8 ist dann für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\,.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\, c_k e^{ikx}\,.$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5, 6 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.