Blatt 4

Tutorium HM 2

13. Mai 2009

In Aufgabe 1 werden wir uns mit linearen DGLen nter Ordnung beschäftigen. Ein wichtiges Thema, von dem ihr im Laufe eures Studiums nicht loskommen werdet (Physik $\rightarrow$ Theo C, D, E, ... Etechnik $\rightarrow$ Schwingungskreise in der Elektrodynamik), ist die Entwicklung von Funktionen in eine Basis anderer Funktionen, die den betrachteten Raum vollständig aufspannen. Speziell betrachten wir hier harmonische Funktionen als solche Basisfunktionen (Fourierreihenentwicklung).

1 Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten - A1

Eine solche lineare DGL hat die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n+1)} + \cdots + a_0 y = f(x) \quad (*)$$

Hierbei ist $y^{(n)}$ die n-te Ableitung von y. Aufgrund der inhomogenen Seite $f(x)$ wird die Lösung von $(*)$ wieder eine Linearkombination der homogenen und der partikulären Lösung sein. Kümmern wir uns zunächst um die homogene:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n+1)} + \cdots + a_0 y = 0 \quad (**)$$

Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Sein die Nullstellen dieses CP $\lambda_1 ... \lambda_n$ mit der jeweiligen Vielfachheit 1 (jede NS kommt nur einmal vor). Dann ist die Lösung von $(**)$

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

mit Konstanten $(c_1, \cdots, c_n)$. Für den Fall, dass eine Nullstelle λ_k m-fach vorkommt, kann man den Ansatz

$$\tilde{y}(x) = c(x)e^{\lambda_k x}$$

machen. Man erhält allgemein für $c(x)$ ein Polynom $m-1$-ter Ordnung in x, d.h. m linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda_k x},\ xe^{\lambda_k x},\ x^2e^{\lambda_k x}, \cdots,\ x^{m-1}e^{\lambda_k x}.$$

Die partikuläre Lösung erhält man dann wieder durch Variation der Konstanten oder einen entsprechenden Ansatz, d.h. durch „scharfes Hinsehen".

Bemerkung: Sind die NS des CP komplex, d.h. $\lambda = a \pm ib$, so sind die linear unabhängigen Lösungen gegeben durch

$$e^{ax}e^{ibx}, \quad e^{ax}e^{-ibx}.$$

Da jede Linearkombination eine Lösung ist, sind auch

$$e^{ax}cos(bx), \quad e^{ax}sin(bx)$$

zwei mögliche Lösungen.

2 Die Analogie zur Vektoralgebra - A2

Erinnern wir uns an die Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ im $\mathbb{R}^n$. Mit einer Orthonormalbasis ONB $\{\hat{u}_1, ...\hat{u}_n\}$ ist der $\mathbb{R}^n$ bereits vollständig. D.h. der Vektor $\vec{x}$ kann in der ONB geschrieben werden:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{u}_i | \vec{x} \rangle \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i$$

Die Komponenten x_i des Vektors $\vec{x}$ in der Basis $\{\hat{u}_i\}$ ergaben sich durch Projektion, d.h. durch das Skalarprodukt $x_i = \langle \hat{u}_i, \vec{x} \rangle$. Die „Vollständigkeitsrelation" kann hier also in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \hat{u}_i^T = \mathbf{1}$$

geschrieben werden, wobei **1** die Identität ist und

$$\mathbf{1}\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i(\hat{u}_i^T \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{u}_i | \vec{x} \rangle \, \hat{u}_i.$$

So, gehen wir jetzt in den Funktionenraum: Ein euklidischer Vektorraum ($\mathbb{H}$, < , >), der, versehen mit der Norm

vollständig ist, heißt **Hilbertraum** (der obige $\mathbb{R}^n$ ist also ein solcher).
Definieren wir nun, wie schon auf einem der ersten Übungsblätter, das Skalarprodukt SP

$$\langle f|g \rangle = \int_V dx \bar{f} \cdot g$$

Mit f,g aus einem unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathbb{H}$. Bezüglich dem SP ist die Norm definiert durch

$$||f|| := \sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{\int_V dx \bar{f} \cdot f}$$

Mit diesen Vorraussetzungen können wir eine Funktionenbasis $\{u_1(x), u_2(x), ...\}$ konstruieren, die der Orthonormalitätsbedingung genügen:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$$

Wieder kann eine Funktion f aus $\mathbb{H}$ dargestellt werden durch eine diesmal ∞-dimensionale ONB $\{u_1(x), u_2(x), ...\}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i | f \rangle \, u_i$$

Die Vollständigkeitsrelation ergibt sich durch Betrachten des Skalarprodukts

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i | f \rangle \, u_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_V dx' \bar{u}_i(x') u_i(x) f(x) \\ &= \int_V dx' \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}_i(x') u_i(x)}_{\delta(x-x')} f(x) \end{aligned}$$

Also lautet die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}_i(x')u_i(x) = \delta(x - x')$$

Die Dirac-Delta-Funktion $\delta(x - x')$ besitzt, wie vielleicht schon bekannt ist, die Eigenschaft, dass

$$\int_V dx'\delta(x - x')g(x') = g(x)$$

3 Fourierreihen - A2

Jetzt, nach dieser eher langen aber wichtigen Motivation, ein Spezialfall, die Fourierreihenentwicklung. Wir betrachten einen Raum von Funktionen f, die den Dirichlet-Bedingungen genügen:

1. f ist T-periodisch, d.h. $f(x + T) = f(x)$.

2. f ist beschränkt und an abzählbar vielen Stellen im Intervall der Länge T unstetig.

3. f hat abzählbar viele Extrema im Intervall der Länge T.

4. das Integral über $|f(x)|$ ist konvergent.

Wir suchen eine vollständige Basis, die eine unendlichdimensionale Orthonormalbasis darstellt und ebenfalls eine T-Periodizität aufweist. Da fallen einem doch direkt der Cosinus und der Sinus ein. Das Ziel ist es also, eine ONB wie im ersten Abschnitt zu konstruieren, die aus Sinus- und Cosinus-Termen besteht.

Die Funktionen

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

und

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

erfüllen gerade die Orthonormalitätsbedingung

$$
\begin{aligned}
\langle u_m|u_n\rangle &= \int_{x_0}^{x_0+T} dx\,\sqrt{\frac{2}{T}}cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\\
&= \delta_{mn}\\
\langle v_m|v_n\rangle &= \int_{x_0}^{x_0+T} dx\,\sqrt{\frac{2}{T}}sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\\
&= \delta_{mn}\\
\langle u_m|v_n\rangle &= \int_{x_0}^{x_0+T} dx\,\sqrt{\frac{2}{T}}cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\\
&= 0 \text{ für alle m und n} \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Wir können also eine periodische Funktion f durch eine Fourierreihe darstellen:

$$
f(x) = a_0 + \sum_{k=1} a_k\sqrt{\frac{2}{T}}cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sqrt{\frac{2}{T}}sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)
$$

Die Koefizienten ergeben sich durch die Projektion von f auf die Basen $\{u_n(x)\}$ und $\{v_n(x)\}$:

$$
\begin{aligned}
a_k = \langle u_k|f\rangle &= \int_{x_0}^{x_0+T} dx\,\sqrt{\frac{2}{T}}cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\cdot f(x)\\
b_k = \langle v_k|f\rangle &= \int_{x_0}^{x_0+T} dx\,\sqrt{\frac{2}{T}}sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\cdot f(x)\\
a_0 &= \frac{1}{T}dx\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)
\end{aligned}
$$

a_0 kann als eine Mittelung von f über die Periode T verstanden werden. Schauen wir uns die Fourierreihe an und bedenken, dass $cos(phi) = 1/2(exp(i\phi) + exp(-i\phi))$ und $sin(\phi) = 1/2i(exp(i\phi) - exp(-i\phi))$, so können wir die Reihe auch schreiben durch

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k-\infty}^{\infty} c_k\xi_k(x)\\
\xi_k(x) &= \sqrt{\frac{1}{T}}exp\left(i\frac{2\pi k}{T}x\right)\\
c_k = \langle\xi_k|f\rangle &= \sqrt{\frac{1}{T}}\int_{x_0}^{x_0+T} dx\,exp\left(-i\frac{2\pi k}{T}x\right)\cdot f(x)
\end{aligned}
$$

Beachte, dass die Verbindung zwischen beiden Darstellungsarten in der Beziehung

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k - ib_k)$$
$$c_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k + ib_k)$$

steckt.
Für ungerade Funktionen $f(-x) = -f(x)$ ist $a_k = 0$, für gerade Funktionen $f(-x) = f(x)$ ist $b_k = 0$, wie man einfach zeigen kann. Hier eignet sich also besonders die Darstellung in Cosinus- und Sinus-Reihe. Ansonsten finde ich die Zerlegung in die Basis $\{\xi_n(x)\}$ eleganter. Ein Beispiel erwähne ich hier nicht noch. In der Übung werden wir genügend besprechen.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die homogene Gleichung $y''' - y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$. Somit ist

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x\,, \qquad \phi_2(x) = e^{-x/2}\cos\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\big)\,, \qquad \phi_3(x) = e^{-x/2}\sin\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\big)$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung die Gestalt $q(x)e^{0x}$ hat, wobei q ein Polynom vom Grad 2 ist, und 0 keine Nullstelle von p ist, können wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem entsprechenden Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = ax^2 + bx + c$ erhalten (vgl. Abschnitt 17.8). Dieser liefert

$$y_{\mathrm{p}}''' - y_{\mathrm{p}} = 0 - (ax^2 + bx + c) \stackrel{!}{=} 1 + x^2\,,$$

und wir schließen $a = -1$, $b = 0$ und $c = -1$, bekommen also $y_{\mathrm{p}}(x) = -x^2 - 1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = -x^2 - 1 + c_1 e^x + e^{-x/2}\big[c_2\cos\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\big) + c_3\sin\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\big)\big] \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})\,.$$

b) Hier hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1, d. h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist diesmal von der Form $q(x)e^{2x}$ mit einem Polynom q vom Grad 1. Da 2 keine Nullstelle von p ist, machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = (ax + b)e^{2x}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}' &= ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}\,, \\ y_{\mathrm{p}}'' &= 2ae^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}\,, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$y_{\mathrm{p}}'' - y_{\mathrm{p}} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x} - (ax + b)e^{2x} = (3ax + 4a + 3b)e^{2x} \stackrel{!}{=} xe^{2x}\,,$$

was auf $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{4}{9}$ führt. Mit $y_{\mathrm{p}}(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$ erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung schließlich

$$y(x) = (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{4}{9})e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

c) Die homogene Gleichung haben wir schon in **b)** behandelt. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung diesmal xe^{1x} lautet und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p

mit Vielfachheit $\nu = 1$ ist, reicht es hier nicht, einen Ansatz der Form $(ax + b)e^x$ zu machen; vielmehr muss man $y_\text{p}(x) = x^\nu(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$ betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} y_\text{p}' &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x = \big(ax^2 + (2a + b)x + b\big)e^x\,, \\ y_\text{p}'' &= (2ax + 2a + b)e^x + \big(ax^2 + (2a + b)x + b\big)e^x = \big(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b\big)e^x\,, \end{aligned}$$

d. h. mit diesem Ansatz hat man

$$y_\text{p}'' - y_\text{p} = \big(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx\big)e^x = (4ax + 2a + 2b)e^x \stackrel{!}{=} xe^x\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1e^x + c_2e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Damit ergibt sich $y(0) = c_1 + c_2$ und $y'(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1e^x - c_2e^{-x}$, also $y'(0) = -\frac{1}{4} + c_1 - c_2$. Beides soll $= 0$ sein, das bedeutet $c_1 = -c_2 = \frac{1}{8}$. Das Anfangswertproblem hat somit die Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + \tfrac{1}{8}e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x} = \tfrac{1}{8}(2x^2 - 2x + 1)e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x}\,.$$

d) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ hat die einfachen Nullstellen $0, 1$ und 3, d. h. die homogene Gleichung besitzt

$$y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^x + c_3e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

als allgemeine Lösung. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist von der Form

$$\big(2\cos(1x) + 4\sin(1x)\big)e^{0x}\,.$$

Da $0 + 1i$ keine Nullstelle von p ist, können wir als Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y_\text{p}(x) = a\cos(1x) + b\sin(1x)$ wählen. Es gilt

$$y_\text{p}' = -a\sin x + b\cos x\,, \qquad y_\text{p}'' = -a\cos x - b\sin x\,, \qquad y_\text{p}''' = a\sin x - b\cos x\,,$$

und damit ergibt sich

$$y_\text{p}''' - 4y_\text{p}'' + 3y_\text{p}' = (a + 4b - 3a)\sin x + (-b + 4a + 3b)\cos x \stackrel{!}{=} 2\cos x + 4\sin x\,.$$

Dies liefert die Gleichungen

$$-2a + 4b = 4 \qquad \text{und} \qquad 4a + 2b = 2\,,$$

also $a = 0$ und $b = 1$. Somit haben wir $y_\text{p}(x) = \sin x$ und als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \sin x + c_1 + c_2e^x + c_3e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: Mit $z := y'$ könnte man auch $z'' - 4z' + 3z = 2\cos x + 4\sin x$ betrachten und die ermittelte Lösung z dann noch integrieren.

Aufgabe 2

Die 2π-periodische Funktion $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $f_1(x) := x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$. Laut Beispiel (2) in 18.5 gilt für die Fourierkoeffizienten von f_1

$$\hat{f}_1(0) = \frac{\pi^2}{3} \qquad \text{und} \qquad \hat{f}_1(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2} \quad \text{für } k \neq 0.$$

Wegen $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x^2e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2}\hat{f}_1(k)$, $k\in\mathbb{Z}$, ergibt sich

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2}\hat{f}_1(0) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{und} \qquad \hat{f}(k) = \frac{1}{2}\hat{f}_1(k) = \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{für } k \neq 0.$$

Somit lautet die Fourierreihe von f in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\,e^{ikx}\,.$$

Die Koeffizienten a_k und b_k in der reellen Darstellung der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

kann man folgendermaßen gewinnen

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \quad (k\in\mathbb{N}_0) \qquad \text{und} \qquad b_k = i\big(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\big) \quad (k\in\mathbb{N})\,.$$

In unserem Falle ergibt sich $b_k = 0$ $(k\in\mathbb{N})$ und $a_k = \begin{cases}\frac{\pi^2}{3} & \text{für } k=0\\ \frac{2(-1)^k}{k^2} & \text{für } k\neq 0\end{cases}$ $(k\in\mathbb{N}_0)$.

Bemerkung: (1) Da f stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe von f nach dem Satz in 18.8 die Funktion f in allen Punkten $x\in\mathbb{R}$ dar.
(2) Aus der Linearität des Integrals folgt: Sind $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ und $f_1, f_2\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-periodische Funktionen, die über $[-\pi,\pi]$ integrierbar sind, so gilt für die Fourierkoeffizienten von $\alpha f_1 + \beta f_2$

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)\hat{}\,(k) = \alpha\hat{f}_1(k) + \beta\hat{f}_2(k) \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{Z}.$$

Eine entsprechende Aussage gilt auch für die "reellen" Fourierkoeffizienten von $\alpha f_1 + \beta f_2$

$$\begin{aligned} a_k(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha a_k(f_1) + \beta a_k(f_2) \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{N}_0,\\ b_k(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha b_k(f_1) + \beta b_k(f_2) \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Nun zu g: Wegen $g(x) = 1$ für $x\in[-\pi,0)$ und $g(x) = 1+2x$ für $x\in[0,\pi)$ folgt für jedes $k\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^{-ikx}\,dx + \int_0^{\pi}(1+2x)e^{-ikx}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}\,dx + \int_0^{\pi}2xe^{-ikx}\,dx\right);\end{aligned}$$

für $k=0$ ergibt sich hier $\frac{1}{2\pi}(2\pi+\pi^2) = 1 + \frac{1}{2}\pi$; sonst gilt (partielle Integration)

$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}\Big|_{x=0}^{\pi}\right)\\ &= \frac{i(-1)^k}{k} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k-1}{-k^2} = \frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}\,.\end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von g

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{g}(k)e^{ikx} = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}\right)e^{ikx}\,.$$

Als Koeffizienten in der reellen Form der Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ erhält man $a_0 = 2+\pi$ und $a_k = \hat{g}(k) + \hat{g}(-k) = 2((-1)^k-1)/(\pi k^2)$ sowie $b_k = i(\hat{g}(k) - \hat{g}(-k)) = 2(-1)^{k+1}/k$.

Nun zur Funktion h: Zur Abwechslung berechnen wir diesmal direkt die Koeffizienten a_k und b_k in der Cosinus/Sinus-Darstellung der Fourierreihe. Da h eine gerade Funktion ist (wegen $h(-x) = \cos(-\frac{1}{2}x) = \cos(\frac{1}{2}x) = h(x)$ für alle $x \in (-\pi, \pi)$), gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x) \cos(kx)\, dx.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x) \cos(kx)\, dx \\
&= \big[2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\big]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)(-k\sin(kx))\, dx \\
&= 2\big(\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)\big) + 2k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\, dx \\
&= 4(-1)^k + 2k\bigg(\big[-2\cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\big]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -2\cos(\tfrac{1}{2}x)(k\cos(kx))\, dx\bigg) \\
&= 4(-1)^k - 0 + 4k^2 I_k.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k = 4(-1)^k + 4k^2 I_k$; dies bedeutet $I_k = 4(-1)^k/(1-4k^2)$. Damit kennen wir $a_k = I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe von h in reeller Form

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \cos(kx)\,.$$

Hieraus kann man die Fourierkoeffizienten $\hat{h}(k)$ berechnen

$$\hat{h}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \qquad \text{und} \qquad \hat{h}(-k) = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}\,,$$

wobei $b_0 := 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Daher lautet die Fourierreihe von h in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} e^{ikx}\,.$$

Aufgabe 3

a) Für die Fourierkoeffizienten c_n von f gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \bigg(\int_{-\pi}^{0} \alpha x e^{-inx}\, dx + \int_{0}^{\pi} \beta x e^{-inx}\, dx \bigg), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n = 0$ ergibt sich wegen $e^{-i0x} = 1$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\bigg(\Big[\frac{\alpha x^2}{2}\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[\frac{\beta x^2}{2}\Big]_{0}^{\pi} \bigg) = \frac{1}{2\pi}\bigg(-\frac{\alpha\pi^2}{2} + \frac{\beta\pi^2}{2} \bigg) = \frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}\,,$$

und für $n \neq 0$ liefert partielle Integration

$$\int x e^{-inx}\, dx = \frac{x e^{-inx}}{-in} - \int \frac{e^{-inx}}{-in}\, dx = \frac{x e^{-inx}}{-in} - \frac{e^{-inx}}{(-in)^2} = \bigg(\frac{ix}{n} + \frac{1}{n^2}\bigg) e^{-inx}\,.$$

Für alle $n \neq 0$ folgt damit

$$\begin{aligned}
2\pi c_n &= \bigg[\alpha\bigg(\frac{ix}{n} + \frac{1}{n^2}\bigg)e^{-inx}\bigg]_{x=-\pi}^{0} + \bigg[\beta\bigg(\frac{ix}{n} + \frac{1}{n^2}\bigg)e^{-inx}\bigg]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{\alpha}{n^2} - \alpha\left(\frac{-i\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right) e^{in\pi} + \beta\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right) e^{-in\pi} - \frac{\beta}{n^2}\,,
\end{aligned}$$

wegen $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ also

$$= \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^n)}{n^2} + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)\pi i}{n}\,.$$

Wir fassen zusammen:

$$c_0 = \frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}\,, \qquad c_n = \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^n)}{2\pi n^2} + i\,\frac{(-1)^n(\alpha+\beta)}{2n} \quad (n \neq 0)\,.$$

Für die Fourierkoeffizienten a_n und b_n in der reellen Darstellung der Fourierreihe von f gilt $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$, wegen $c_{-n} = \overline{c_n}$ (nur, da f reellwertig!) also

$$a_n = c_n + \overline{c_n} = 2\,\mathrm{Re}\,c_n \qquad \text{und} \qquad b_n = i(c_n - \overline{c_n}) = -2\,\mathrm{Im}\,c_n\,.$$

Damit folgt $a_0 = 2\,\mathrm{Re}\,c_0 = (\beta-\alpha)\pi/2$ und

$$a_n = \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\,, \qquad b_n = -\frac{(-1)^n(\alpha+\beta)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

b) Die Fourierreihe von f ist genau dann eine reine Sinusreihe, wenn $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind, wenn also $\alpha = \beta$ gilt.

Alternativ: Die Fourierreihe von f ist genau dann eine reine Sinusreihe, wenn f eine ungerade Funktion ist, wenn also $\alpha = \beta$ gilt.

c) Die Funktion f ist 2π-periodisch und stückweise glatt, daher wird sie in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt, in Sprungstellen dagegen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert des links- und des rechtsseitigen Grenzwerts (vgl. Satz in 18.8).

Ist $\alpha = -\beta$, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, d. h. die Funktion wird auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt.

Ist dagegen $\alpha \neq -\beta$, so hat f in den Punkten $x_k = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Sprungstellen mit $f(x_k+) = f(x_k) = -\alpha\pi \neq \beta\pi = f(x_k-)$, ist sonst aber stetig. Daher wird in diesem Falle f nur in den Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{\,(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\,\}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt. In den Punkten x_k konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(f(x_k+) + f(x_k-)) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\pi \neq f(x_k)$.

Aufgabe 4

a) Eine reine Cosinusreihe ergibt sich für gerade Funktionen; also setzen wir f zu einer 2π-periodischen, geraden Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0,\pi], \\ -x - \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x+2\pi) := F(x).$$

Für die Fourierkoeffizienten a_k und b_k von F gilt dann $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2})\cos(kx)\,dx\,.$$

Es ist $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x - \frac{\pi}{2})\,dx = \frac{2}{\pi}[\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = 0$ und für $k \neq 0$ haben wir

$$\int x\cos(kx)\,dx = \frac{x\sin(kx)}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k}\,dx = \frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\,.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 0\,.$$

Das bedeutet $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = -4/((2n+1)^2\pi)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Da F stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion F auf ganz $\mathbb{R}$ dar, es gilt also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi}\cos((2n+1)x) \qquad \text{für alle } x \in [0,\pi]\,.$$

b) Eine reine Sinusreihe erhalten wir, wenn wir f zu einer ungeraden Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in (0,\pi), \\ 0 & x = 0 \text{ oder } x = \pi \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x+2\pi) := F(x).$$

Dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2}) \sin(kx)\, dx$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Partielle Integration liefert

$$\int x \sin(kx)\, dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k}\, dx = -\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\,,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi(-1)^k}{k} + \frac{\cos(kx)}{k} \Bigg|_{x=0}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{k} = -\frac{(-1)^k + 1}{k}\,. \end{aligned}$$

Also ist $b_{2n-1} = 0$ und $b_{2n} = -1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da F stückweise glatt ist, wird die Funktion F in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt; wir erhalten also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin(2nx) \qquad \text{für alle } x \in (0,\pi)\,.$$

In den Stellen $x_k = k\pi$ konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(F(0+)+F(0-)) = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 0$.

Aufgabe 5

Setzen wir in die Darstellung aus **4 b)** $x = \pi/4$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin(n\pi/2) = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - + \cdots\,.$$

Die erste Reihe hat also den Wert $\pi/4$.
Setzen wir in die Darstellung aus **4 a)** $x = 0$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} = -\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \right)\,.$$

Die zweite Reihe ergibt also $\pi^2/8$.

Aufgabe 6

Annahme: Es gibt eine 2π-periodische, über $[-\pi,\pi]$ integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit reellen Fourierkoeffizienten $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbb{N})$. Die Besselsche Ungleichung besagt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Daher folgt wegen $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2\sqrt{k}}$ und $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2\sqrt{k}}$ (für alle $k \in \mathbb{N}$)

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left(|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2 \right) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2k}\,,$$

d.h. die Konvergenz der harmonischen Reihe. Dies ist ein Widerspruch! Deshalb existiert keine 2π-periodische, über $[-\pi,\pi]$ integrierbare Funktion, welche die Fourierreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ besitzt.

Aufgabe 7

Wir zeigen zunächst für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx. \tag{1}$$

Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Aufgrund der T-Periodizität von f gilt $f(x) = f(x-T)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher erhalten wir mit der Substitution $t = x - T, dt = dx$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x-T)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt.$$

Addition von $\int_a^T f(x)\,dx$ auf beiden Seiten ergibt nach den Rechenregeln für (Riemann-) Integrale

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

also (1). Um die Identität $\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ zu zeigen, ersetzen wir in der Gleichung (1) a durch $a - \frac{T}{2}$ (dies ist zulässig, weil (1) ja für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt) und erhalten

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx. \tag{2}$$

Setzen wir in (1) speziell $a = -\frac{T}{2}$, so bekommen wir

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \overset{(2)}{=} \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)\,dx.$$

Aufgabe 8

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion. Bezeichnen

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von f, so gibt es nach dem Satz in 18.8 die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da f' stetig differenzierbar und 2π-periodisch ist, gilt nach dem Darstellungssatz in 18.8

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\gamma_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von f' sind. Zum Nachweis der behaupteten Identität, müssen wir also $\gamma_k = ikc_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ zeigen.
Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(x)e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{\pi}}_{=0,\text{ da } 2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)ike^{-ikx}\,dx = ikc_k.$$

Im Fall $k = 0$ ergibt sich wegen der 2π-Periodizität von f

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 = i \cdot 0 \cdot c_0.$$