UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
20.05.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$N_c(f) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = c \right\},$$

die sogenannten *Niveaulinien* von f. Veranschaulichen Sie sich die folgenden Funktionen, indem Sie die Niveaulinien N_c für $c \in \{-2,-1,0,1,2\}$ skizzieren:

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad g(x,y) = xy\,, \qquad h(x,y) = y^2 - x^2\,.$$

Aufgabe 2

Die Funktionen f, g und h sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to g(0,0)$ für $r \to 0$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} h(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} h(x,y)\Big)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie jeweils, ob sich die Funktion f in $(0,0)$ stetig fortsetzen lässt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die stetige Fortsetzung.

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y}\,, \quad y \neq 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\,, \quad (x,y) \neq (0,0)$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}\,, \quad x \neq 0$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,, \quad (x,y) \neq (0,0)$

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie deren Längen.

a) $\gamma(t) = \big(t - \sin t,\ 1 - \cos t\big) \qquad (t \in [0, 2\pi])$

b) $\gamma(t) = \big(t,\ |t|\big) \qquad (t \in [-1, 1])$

c) $z(\varphi) = \varphi e^{i\varphi} \qquad (\varphi \in [0, 2\pi])$

d) $\gamma(t) = \big(\sin^3(\frac{1}{3}t)\cos t,\ \sin^3(\frac{1}{3}t)\sin t\big) \qquad (t \in [0, 6\pi])$

Hinweise zur Bestimmung von $\int \|\dot\gamma(t)\|\, dt$: **a)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **c)** Es gilt $\int\sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2})$. **d)** Benutzen Sie das Additionstheorem für Cosinus.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad x + z = 1$$

genügen. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Menge an und berechnen Sie eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge. Bestimmen Sie außerdem in jedem Kurvenpunkt den Tangentenvektor.

Aufgabe 6

Die Kurve $\gamma\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

a) Sei $t_0 \in (-1, 1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\gamma(t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$ **b)** $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$

c) $f(x, y, z) = xyz\sin(x + y + z)$ **d)** $f(x, y, z) = xe^y/z, \quad z \neq 0$

Berechnen Sie in **a)**, **b)** und **d)** auch die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung von f in Richtung $v = (1, 1)$.

ACHTUNG: Terminänderung Auf vielfachen Wunsch wird die Übung am Freitag, den 22.05.09, verschoben. Ausweichtermin ist
Montag, 25.05.09, von 8:00 bis 9:30 Uhr in Chemie Neuer Hörsaal.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.