Blatt 5

Tutorium HM 2

19. Mai 2009

Auf diesem Blatt geht es um Funktionen mehrerer Veränderlicher. Damit verbunden Begriffe wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und die Parametrisierung von Oberflächen und Kurven. In der Theorie A habt ihr sicher schon viel dazu gemacht. Deshalb dürfte es euch nicht schwer fallen, diese Hilfe zu überfliegen.

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Betrachtet werden nun Funktionen $\vec{f} : D \in \mathbb{R}^n \to W \in \mathbb{R}^m$. Dabei wird ein Vektor $\vec{x} \in D$ auf ein Vektorfeld $\vec{f} \in W$ abgebildet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Wie im eindimensionalen heißt D Urbildraum oder Definitionsmenge, W ist der Bildraum.

2 Stetigkeit

Zur Stetigkeit in einer Dimension (siehe HM I) ändert sich in der Definition eigentlich garnichts. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in dem Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn für $||\vec{x} - \vec{a}|| < \delta$ folgt, dass

$$\Rightarrow ||f(\vec{x}) - f(\vec{a})|| < \epsilon.$$

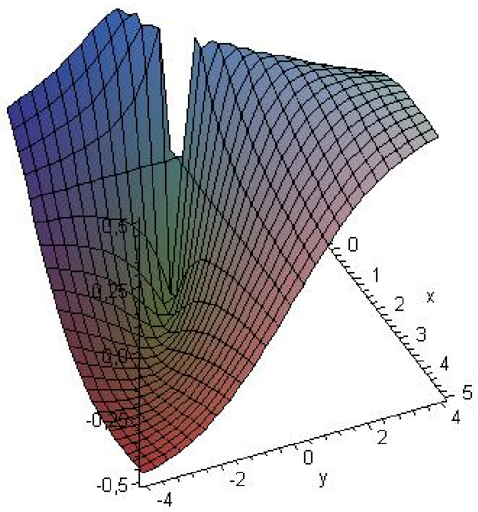
Oder kurz f stetig in $\vec{a} \Leftrightarrow lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. Sei $\vec{a} \in I$, so heißt f stetig auf der Menge I, wenn

$$lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

in allen $\vec{a} \in I$. Die Schwierigkeit besteht nun darin herauszufinden, ob eine Funktion von allen Richtungen her stetig ist.

Beispiel:
Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , falls \quad x > 0 \\ 0 & falls \quad x \leq 0 \end{cases}$$



und überprüfen die Stetigkeit in dem Punkt $(x,y) = (0,0)$. Sowohl $lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ (Annäherung auf der Geraden $y = 0$), als auch $lim_{y\to 0} f(y,0) = 0$ (Annäherung auf der Geraden $x = 0$). Nähern wir uns jedoch auf der Geraden $y = x$ dem Punkt $(0,0)$ an, so erhalten wir

$$lim_{x\to 0} f(x,x^2) = lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

f ist also nicht stetig in $(0,0)$.

Andere Methode:
Unter Benutzung von Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ kann man den Limes bequem aus beliebigen Richtungen betrachten.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\phi) \\ r\,sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Für obiges Beispiel erhalten wir

$$f(r\,cos(\phi), r\,sin(\phi))|_{r=0} = cos(\phi) sin(\phi)$$

Somit ist der Limes $\lim_{r\to 0} f$ nicht für jeden Winkel, somit jede Richtung gleich null. f ist demzufolge nicht stetig.[1]

3 Differezierbarkeit

Eine skalare Funktion heißt diffbar bei x_i, wenn der Differenzenquotient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\vec{x}) \\ &:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ...x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + \hat{e}_i h) - f(\vec{x})}{h} \end{aligned}$$

existiert. Diese sogenannten partiellen Ableitungen können, sofern sie existieren, in dem **Gradienten**

$$grad\, f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

zusammengefasst werden. f heißt stetig diffbar in (x_0, y_0), wenn alle partiellen Ableitungen in diesem Punkt stetig sind (siehe oben). Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld, so tritt anstelle des Gradienten die Jakobimatrix. Sei

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

, so führt eine Taylorentwicklung von $\vec{f}$ zu einer Taylorentwicklung der Komponenten

[1] Die Substitutionsmethode mit Polarkoordinaten ist nicht immer sinnvoll. Hier lagen x und y in gleicher Potenz vor. Wir konnten also die Relation $cos^2\phi + sin^2\phi = 1$ ausnutzen.

$$
\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) &= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}_0+\vec{h}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0+\vec{h}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}_0) + \nabla f_1(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0) + \nabla f_m(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) \end{pmatrix} + ... \\
&= \vec{f}(\vec{x}_0) + \begin{pmatrix} (\nabla f_1(\vec{x}_0))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_m(\vec{x}_0))^T \end{pmatrix} (\vec{x}-\vec{x}_0) + ... \\
&= \vec{f}(\vec{x}_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}}_{J_f} (\vec{x}-\vec{x}_0) + ...
\end{aligned}
$$

J_f heißt **Jakobi-Matrix** und ist die Verallgemeinerung des Gradienten für Vektorfelder f.

3.1 Das totale Differential

Wozu ist die Zusammenfassung der partiellen Ableitungen in den Gradienten eigentlich sinnvoll? Schauen wir uns eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$ an:

Sei $f(x,y)$ eine skalare Funktion. Das totale Differential lässt sich schreiben durch

$$
\begin{aligned}
df(x,y) &= \partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy \\
&= \underbrace{\nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}_{Skalarprodukt}
\end{aligned}
$$

In der letzten Zeile wurde der Gradient $\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f)^T$ als abkürzende Schreibweise eingeführt. Mehr ist es eigentlich auch garnicht. Eine graphische Veranschaulichung des Gradienten, wie z.B. die „Steigung“ im 1-D, ist nämlich nur in Einzelfällen sinnvoll.
Der Beweis der totalen Ableitung ist einfach:

$$\begin{aligned}\Delta f &:= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)\\ &- f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x\\ &+ \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y\\ (\Delta x, \Delta y \to 0) &\to \partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy\end{aligned}$$

3.2 Kettenregel und Richtungsableitung

Sei $\vec{x}(t)$ eine durch t parametrisierte Kurve (siehe unten). Die Ableitung der Funktion $f(x_1(t), ..., x_n(t))$ ergibt sich nach obidem totalen Differential durch:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(\vec{x}(t)) &= \partial_1 f(\vec{x}(t))\dot{x}_1(t) + \cdots + \partial_n f(\vec{x}(t))\dot{x}_n(t)\\ &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\end{aligned}$$

Hier steht nun die Richtungsableitung von f in Richtung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)$. Was verstehen wir unter einer Richtungsableitung? Sei $f(\vec{x}(t)) = f(\underbrace{\vec{x} + t\vec{d}}_{\vec{x}(t)})$. Dann ist die Richtungsableitung in Richtung $\vec{d}$ definiert als die totale Ableitung nach t, also:

$$\begin{aligned}D_{\vec{d}} f &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\\ &= \nabla f \cdot \vec{d}\end{aligned}$$

3.3 Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Für jede C^2-Funktion[2] f: $I \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, I offen, gilt:

$$\partial_i(\partial_k f) = \partial_k(\partial_i f)$$

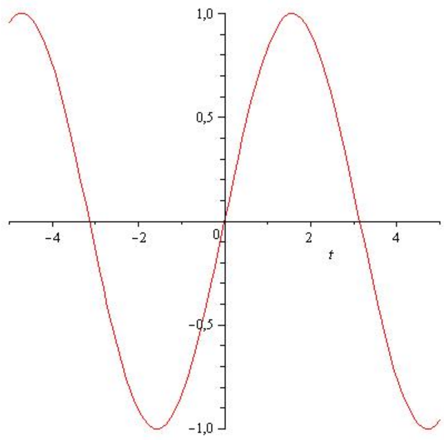
Der Beweis ist einfach nur die mehrfache Anwendung des Mittelwertsatzes für jeweils eine Veränderliche (siehe Vorlesung oder Lehrbuch). Was hier jedoch wichtig ist, ist die Offenheit des Gebietes I, damit die Stetigkeit und die stetige Diffbarkeit über den zweiseitigen Limes definiert werden kann.

[2] also jede Funktion die 2 mal stetig partiell diffbar ist

4 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Sei $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ eine durch den Parameter t parametrisierte Kurve. Ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ wäre

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ sin(t) \end{pmatrix}$$



Der Tangentenvektor an solch eine Kurve ergibt sich durch einfache Überlegung. Der Abbildung 1 entnehmen wir, dass $\Delta\vec{x} = \vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)$ näherungsweise der Richtung der Tangente an die Kurve $x(t)$ entspricht.

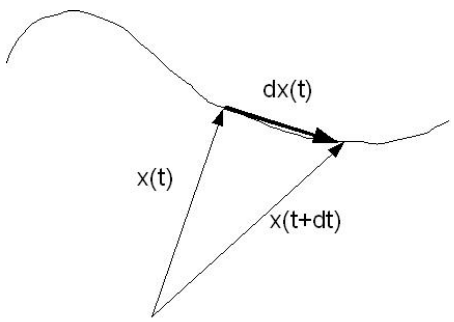


Abbildung 1: Tangentialableitung

Im Grenzübergang erhalten wir dann den unnormierten Tangentenvektor durch die totale Ableitung von $\vec{x}(t)$ nach t

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \\ &= \dot{\vec{x}}(t) \end{aligned}$$

Wollen wir nun wissen, welche Strecke wir zurücklegen, wenn wir die Kurve $\vec{x}(t)$ abfahren, so hilft uns der Tangentenvektor weiter. Ein Wegelement Δs der sogenannten Bogenlänge s ergibt sich nämlich gerade durch (siehe Abbildung 1)

$$\begin{aligned} \Delta s &= ||\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)|| \\ \rightarrow ds &= ||\dot{\vec{x}}||dt \end{aligned}$$

Die Bogenlänge der Kurve vom Punkt $\vec{x}(t_0)$ bis $\vec{x}(t)$ erhält man also folgendermaßen:

$$s = \int_{t_0}^{t} dt\, ||\dot{\vec{x}}||$$

Wir könne die Kurve $\vec{x}$ auch über die Bogenlänge s parametrisieren. Dazu genügt es s(t) zu kennen und soweit legitim die Umkehrfunktion t(s) zu bestimmen. Wir erhalten dann $\vec{x} = \vec{x}(t(s))$. Betrachten wir

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \dot{\vec{x}}(t)|_{t=t(s)} t'(s)$$

Aufgrund der Umkehrbarkeit der Funktion s(t) ergibt sich nach Definition der Bogenlänge s gerade

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{ds} &= \frac{\dot{\vec{x}}(t)|_{t=t(s)}}{\frac{ds}{dt}} \\ &= \frac{\dot{\vec{x}}}{||\dot{\vec{x}}||} \end{aligned}$$

$\frac{d\vec{x}}{ds}$ entspricht also gerade dem normierten Tangentenvektor an die Kurve. Wir nennen diesen $\vec{\tau}$.
Interessiert mich die Darstellung dieser Tangente an einen Punkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ der Kurve, so muss ich lediglich eine Tayloentwicklung bis zur ersten Ordnung in t durchführen. Das geschieht bei einem Vektor komponentenweise:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \dot{\vec{x}}(t_0)t + O(t^2)$$

Die Tangente an den Punkt $\vec{x}_0$ lautet also

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \dot{\vec{x}}(t_0)t$$

Neben dem Tangentenvektor ist noch ein weiterer charakteristisch für die Kurve, nämlich einer der Normalenvektoren.

Führen wir die gleiche Überlegung wie bei der Herleitung des Tangentialvektors $\vec{\tau}(t) = \dot{\vec{x}}(t)/||\dot{\vec{x}}(t)||$ durch. Den Hauptnormalenvektor $\vec{N}$ erhalten wir gerade analog (siehe Abbildung 2):

$$\Delta\tau(t) = \tau(t + \Delta t) - \tau(t)$$
$$\Rightarrow \vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{\tau}}(t)}{||\dot{\vec{\tau}}||}$$

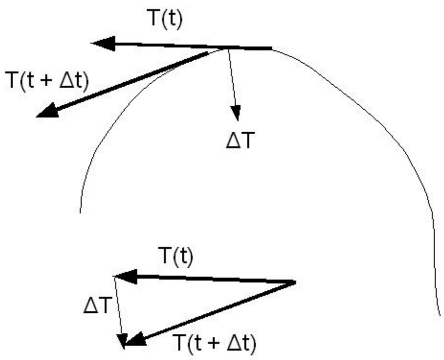


Abbildung 2: Herleitung des Normalenvektors

Vielleicht noch eine Zusatzbemerkung: Das Krümmungsverhalten, d.h. die Rate, mit der sich der Tangentenvektor $\vec{\tau}$ längs der Bogenlänge s verändert, können wir auch durch einen Vektor beschreiben, der sich analog zu obiger Überlegung ergibt:

$$lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} = \frac{\dot{\vec{\tau}}(t)}{\dot{s}(t)} = \frac{\dot{\vec{\tau}}(t)}{||\dot{\vec{x}}(t)||} =: \vec{\kappa}(t)$$

$\vec{\kappa}(t)$ nennt sich Krümmungsvektor. $||\vec{\kappa}(t)||$ nennt sich Krümmung. Bei einem Kreis entspricht die Krümmung gerade dem reziproken des Radius, $1/R$. Bei einer Geraden ist die Krümmung gleich Null.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

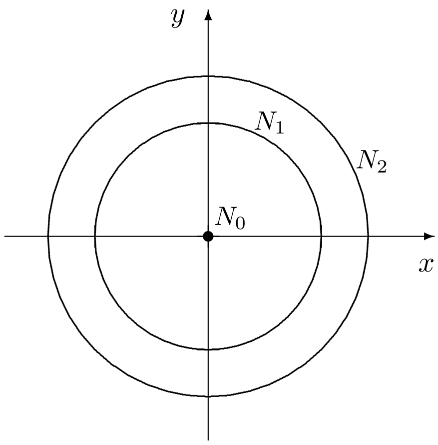
Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

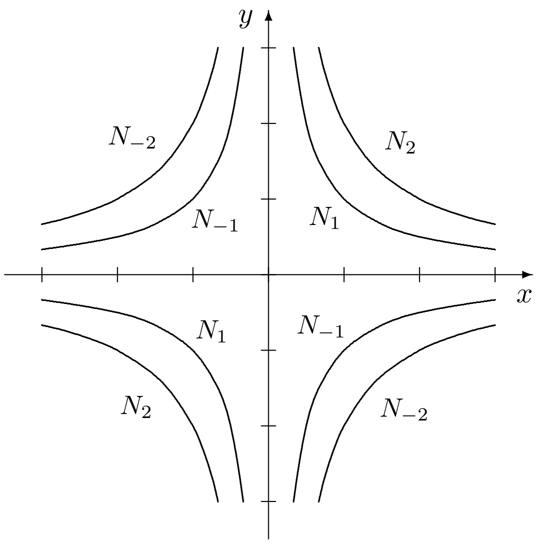
- Die Niveaulinie $N_c(f)$ ergibt sich aus der Gleichung $f(x,y) = c$, also

$$x^2 + y^2 = c\,.$$

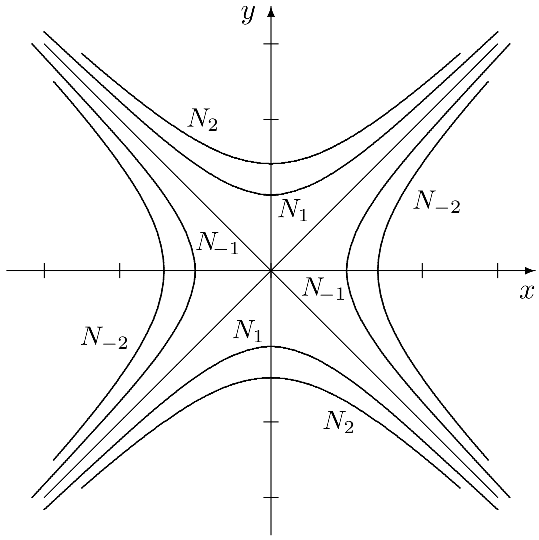
Für $c < 0$ erhalten wir die leere Menge, für $c = 0$ nur den Nullpunkt und für $c > 0$ einen Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{c}$. Dies ergibt die folgende Skizze, wobei der kleinere Kreis den Radius 1 und der größere den Radius $\sqrt{2}$ hat:



- Die Gleichung $xy = c$ hat für $c = 0$ die Lösungsmenge $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oder } y = 0\,\}$. Für $c \neq 0$ erhält man das Schaubild der Funktion $y = c/x$, die Niveaulinien sind also Hyperbeln. Die Skizze sieht wie folgt aus, wobei N_0 aus den beiden Achsen besteht:



- Hier erhalten wir die Gleichung $y^2 = c + x^2$, also $|y| = \sqrt{c+x^2}$ bzw. $y = \pm\sqrt{c+x^2}$. Es ergibt sich das folgende Bild, wobei N_0 aus den beiden Winkelhalbierenden besteht:



Bemerkung: Wegen $h(x,y) = (y-x)(y+x)$ erhalten wir das gleiche Bild wie bei der Funktion g, allerdings gedreht und mit anderen Längen.

Aufgabe 2

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \Rightarrow -xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sowie $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \Rightarrow xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|y| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Es gelte $(x_n,y_n) \to (0,0)$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0,2\pi)$ mit $(x_n,y_n) = (r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n,y_n) = f(r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n) &= \frac{(r_n\cos\varphi_n)(r_n\sin\varphi_n)^2}{(r_n\cos\varphi_n)^2+(r_n\sin\varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n}{r_n^2} = r_n\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

weil $r_n \to 0$ strebt und die Folge $(\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n)$ beschränkt ist.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2,1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\varphi = 0$ ist $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \to 0 = g(0,0)$ für $r \to 0$. Im Fall $\cos\varphi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 3

Eine Funktion f lässt sich in $(0,0)$ stetig fortsetzen, wenn der Grenzwert $c := \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert. Die stetige Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f ist dann gegeben durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Diesmal ist $f(x,y)$ nur für $y \neq 0$ definiert. Wir betrachten daher eine Folge (x_k, y_k) in $\mathbb{R}^2$ mit $y_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(x_k, y_k) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Dann ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f(x_k, y_k) = \frac{1-\cos(x_k y_k)}{y_k} = \begin{cases} x_k \cdot \dfrac{1-\cos(x_k y_k)}{x_k y_k}, & x_k \neq 0, \\ 0, & x_k = 0. \end{cases}$$

Wegen $x_k y_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und $(1-\cos t)/t \xrightarrow{t\to 0} 0$ (Man beachte $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - + \cdots$. Alternativ kann man $(\cos t - 1)/t$ als Differenzenquotient von $g(t) := \cos t$ in 0 auffassen. Wegen $g'(t) = -\sin t$ erhält man dann $\lim_{t\to 0}(1-\cos t)/t = -g'(0) = 0$. Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital könnte man diesen Grenzwert natürlich auch berechnen.) erhält man $\frac{1-\cos(x_k y_k)}{x_k y_k} \to 0$ und damit $f(x_k, y_k) \to 0$ für $k \to \infty$, d.h. $f(x,y)$ konvergiert gegen 0 für $(x,y) \to (0,0)$. Die stetige Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f in $(0,0)$ ist deshalb gegeben durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich unmittelbar

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2.$$

Also lässt sich f stetig in $(0,0)$ fortsetzen mit

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

c) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht, so dass sich f nicht stetig in $(0,0)$ fortsetzen lässt.

d) Wegen

$$|x^3+y^3| \leqslant |x|^3 + |y|^3 \leqslant \max\{|x|,|y|\} \cdot |x|^2 + \max\{|x|,|y|\} \cdot |y|^2 = \max\{|x|,|y|\} \cdot (x^2+y^2)$$

erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{\max\{|x|,|y|\} \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \max\{|x|,|y|\} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0,$$

d.h. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, also ist die stetige Fortsetzung von f in $(0,0)$ gegeben durch

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Alternativ: Es gelte $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ und $(x_k, y_k) \to (0,0)$. Dann gibt es $r_k > 0$ und $\varphi_k \in \mathbb{R}$ mit $(x_k, y_k) = (r_k \cos\varphi_k, r_k \sin\varphi_k)$; dies ist die Darstellung der Folge in Polarkoordinaten. Dabei gilt $r_k^2 = r_k^2(\cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k) = x_k^2 + y_k^2$, also $r_k = \|(x_k, y_k)\| \to 0$. Somit hat man

$$f(x_k, y_k) = \frac{r_k^3 \cos^3\varphi_k + r_k^3 \sin^3\varphi_k}{r_k^2} = r_k\big(\cos^3\varphi_k + \sin^3\varphi_k\big) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

wegen der Beschränktheit von Sinus und Cosinus. Folglich ist $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

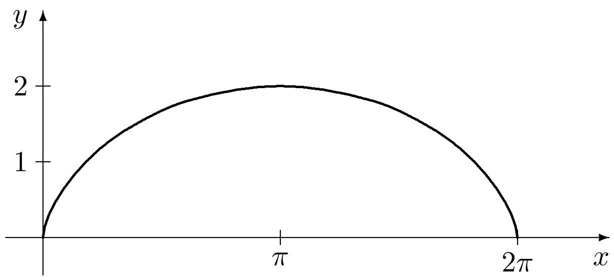
Aufgabe 4

a) Es gilt $\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t \\ &= 2\big(1 - \cos(\tfrac12 t + \tfrac12 t)\big) = 2\big(1 - \cos^2(\tfrac12 t) + \sin^2(\tfrac12 t)\big) = 4\sin^2(\tfrac12 t)\,.\end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist also

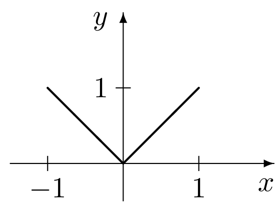
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac12 t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac12 t)\,dt = -4\cos(\tfrac12 t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt Zykloide. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

b) Wegen $\gamma(t) = (t, |t|) = \begin{cases} (t, -t) & \text{für } t \in [-1,0) \\ (t,\, t) & \text{für } t \in [0,1] \end{cases}$ ist $\dot\gamma(t) = \begin{cases} (1, -1) & \text{für } t \in (-1,0) \\ (1,\, 1) & \text{für } t \in (0,1) \end{cases}$ und für die Länge der Kurve γ ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{-1}^0 \|(1,-1)\|\,dt + \int_0^1 \|(1,1)\|\,dt = \int_{-1}^1 \sqrt2\,dt = 2\sqrt2\,.$$



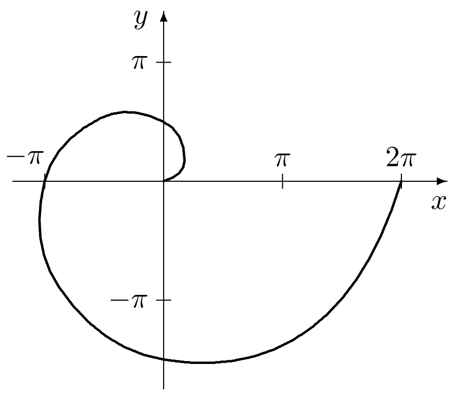
c) Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist die Kurve $\vec r(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Wegen $\vec{r}'(\varphi) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\vec{r}'(\varphi)\|^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \\
&= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi \\
&= 1 + \varphi^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(\varphi)\|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}+\sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\operatorname{Arsinh}2\pi}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,.
\end{aligned}$$



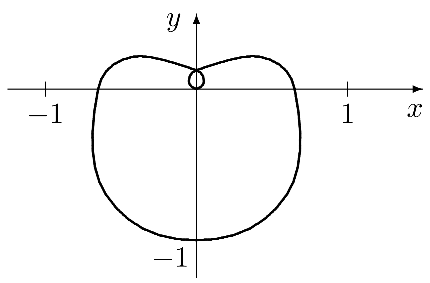
Bemerkung: Diese Kurve heißt Archimedische Spirale.

d) Für $\gamma(t) = (\sin^3(\frac{1}{3}t)\cos t, \sin^3(\frac{1}{3}t)\sin t) =: (x(t), y(t))$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 3\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{1}{3}t)\tfrac{1}{3}\cos t - \sin^3(\tfrac{1}{3}t)\sin t \\
&= \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\big(\cos(\tfrac{1}{3}t)\cos t - \sin(\tfrac{1}{3}t)\sin(t)\big) = \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{4}{3}t)\,,
\end{aligned}$$

und genauso $y'(t) = \sin^2(\frac{1}{3}t)\sin(\frac{4}{3}t)$. Folglich ist die Länge der Kurve γ

$$\begin{aligned}
&\int_0^{6\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{\sin^4(\tfrac{1}{3}t)\cos^2(\tfrac{4}{3}t) + \sin^4(\tfrac{1}{3}t)\sin^2(\tfrac{4}{3}t)}\,dt \\
&= \int_0^{6\pi} \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{6\pi} \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt + \int_0^{6\pi}\cos^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt\right) = \frac{1}{2}\int_0^{6\pi} 1\,dt = \frac{6\pi}{2} = 3\pi\,.
\end{aligned}$$



Bemerkung: Die Kurve wird bei der gegebenen Parametrisierung zweimal durchlaufen und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn.

Aufgabe 5

Es handelt sich um den Schnitt der Oberfläche der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 und der Ebene $x+z=1$; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z = 1-x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1\,, \quad \text{also} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 0\,.$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y)^2 = 0\,.$$

Bei dieser Gleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cos t, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y = \tfrac{1}{2}\sin t \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Dann haben wir $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$. Also:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\gamma(t)$ lautet $\dot\gamma(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s(t) := \int_0^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + 2\cos^2\tau + \sin^2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{2}\,d\tau = t/\sqrt{2} \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

also gilt $L(\gamma) = s(2\pi) = \sqrt{2}\pi$. Wegen $t = t(s) = \sqrt{2}\,s$ ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge (bzw. die natürliche Parametrisierung) gegeben durch

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(\sqrt{2}\,s) \\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,s) \\ 1 - \cos(\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix} \qquad (s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]).$$

Aufgabe 6

a) Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\gamma(t_0) + \lambda\dot\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \arcsin t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\gamma(t_0)$.

b) Für $t \in [-1, 1]$ haben wir

$$s(t) := \int_{-1}^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau = \int_{-1}^t \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau = \sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-1}^t = \sqrt{2}\,(\arcsin t + \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \arcsin t, \qquad \text{also} \qquad t = t(s) = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$$

lautet eine Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder natürliche Parametrisierung)

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 7

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in x^0 in Richtung des ersten Einheitsvektors $e_1 = (1,0)$, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) := \frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x^0+te_1)-f(x^0)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f((x,y)+t(1,0))-f(x,y)\big)\\ = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+t,y)-f(x,y)\big).\end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies ist gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x,y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitungen nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x - 4y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) &= -8xy + 12y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= -8xy + 12y^2\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= (3x^2+y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}f(x,y)\,.\end{aligned}$$

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1, v_2) = (1,1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x^0+tv) - f(x^0)\Big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big((x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1+yv_2) + t^2(v_1^2+v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1+yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\\ &\qquad + t^2(v_1^2+v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t+\beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t+\beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(g(t)-g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2) + 2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1 + 0\\ &= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x) + 2(x+y)\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ von f stetig sind, ist f nach dem Satz in 19.10 differenzierbar. Deshalb gilt nach dem Satz in 19.9 für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= f'(x,y)\,v = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\begin{pmatrix}x^2y+2x+y^3 & x^3+xy^2+2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\big(x^2y+2x+y^3+x^3+xy^2+2y\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Dies bestätigt unser obiges Ergebnis.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= yz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xy\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,.\end{aligned}$$

d) Hier sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^y/z\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) &= e^y/z = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) &= -e^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)\,.\end{aligned}$$