UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
28.05.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\right)$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \left(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\right)$

c) $f\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\varphi,\theta) = \left(r\cos\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\theta\right)$

d) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Aufgabe 2

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{für } xy \geqslant 0\,, \\ x+y & \text{für } xy < 0\,. \end{cases}$
Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt, soweit sie existieren.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0,y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $u := (1,2)$ und $v := (-1,1)$ gelte $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -1$ sowie $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 2$.
Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial w}(x_0,y_0)$ für $w := (1,1)$. Geben Sie die Richtung $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

Aufgabe 4

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

— bitte wenden —

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Rechnen Sie nach, dass die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ nicht stetig sind.

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Satz von Schwarz.

Aufgabe 6

Die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$f(x,y) = \big(x^2,\, y^2\big)\,, \qquad g(x,y) = \big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big)\,, \qquad h(x,y) = \big(e^x \cos y,\, \sinh x\big)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen von f, g und h, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $g \circ f$ und $h \circ g$ explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 7

Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $g(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $(g|_U)^{-1}\colon V \to U$ in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion g in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber g nicht injektiv ist.

Aufgabe 8

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$.

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0,0)$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 4, 5 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.