Blatt 6

Tutorium HM 2

1. Juni 2009

Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.

Zu diesem Blatt wurde auf der letzten Hilfe schon einiges gesagt. Deshalb hier nochmal in Kürze und mit einigen Beispielen:

1 Differezierbarkeit

Eine skalare Funktion heißt diffbar bei x_i, wenn der **Differenzenquotient**

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \partial_i f(\vec{x}) \\
&:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ...x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + \hat{e}_i h) - f(\vec{x})}{h}
\end{aligned}$$

existiert. Wir hatten diese partielle Ableitungen für die skalare Funktion in dem **Gradienten**

$$grad\, f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

zusammengesfasst. Falls $\vec{f}(\vec{x})$ eine skalare Funktion ist, führte uns die komponentenweise Taylorentwicklung der Funktion auf den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) &= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}_0+\vec{h}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0+\vec{h}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}_0) + \nabla f_1(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0) + \nabla f_m(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) \end{pmatrix} + ... \\
&= \vec{f}(\vec{x}_0) + \begin{pmatrix} (\nabla f_1(\vec{x}_0))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_m(\vec{x}_0))^T \end{pmatrix} (\vec{x}-\vec{x}_0) + ... \\
&= \vec{f}(\vec{x}_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}}_{J_f} (\vec{x}-\vec{x}_0) + ...
\end{aligned}
$$

J_f heißt **Jakobi-Matrix** und ist die in Aufgabe 1 gefragte Ableitung. Hat man eine vektorielle Funktion $\vec{f}$ mit m skalaren Komponenten $f_1, ..., f_m$ und hängen diese Funktionen von den n Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ ab, so erhalten wir eine $m \times n-$Matrix als Jacobische.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2y^3 + y\,\ln(x) \\
\partial_x f &= 2xy^3 + \frac{y}{x} \\
\partial_y f &= 3x^2y^2 + \ln(x) \\
J_f(x,y) &= \Big(2xy^3 + \frac{y}{x},\, 3x^2y^2 + \ln(x)\Big)
\end{aligned}
$$

Wir nennen eine Funktion $\vec{f}$ **stetig differenzierbar**, wenn J_f existiert und jede Ableitung $\partial_j f_i(\vec{x})$ stetig ist. Sind sämtliche k-fachen Ableitungen stetig, so sagt man $\vec{f}$ ist k-fach stetig diffbar. Die Menge dieser Funktionen wird mit C^k bezeichnet.

2 Kettenregel und Richtungsableitung

Sei $\vec{x}(t)$ eine durch t parametrisierte Kurve. Die Ableitung der Funktion $f(x_1(t), ..., x_n(t))$ ergibt sich nach dem totalen Differential durch:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(\vec{x}(t)) &= \partial_1 f(\vec{x}(t))\dot{x}_1(t) + \cdots + \partial_n f(\vec{x}(t))\dot{x}_n(t) \\ &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\end{aligned}$$

Hier steht nun die Richtungsableitung von f in Richtung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)$. Sei $f(\vec{x}(t)) = f(\underbrace{\vec{x} + t\vec{d}}_{\vec{x}(t)})$. Dann ist die **Richtungsableitung** in Richtung $\vec{d}$ definiert als die totale Ableitung nach t, also:

$$\begin{aligned}D_{\vec{d}} f &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \\ &= \nabla f \cdot \vec{d}\end{aligned}$$

Sei $\vec{f}(\vec{u})$ eine Funktion die von einer Funktion $\vec{u}(\vec{x})$ abhängt. Allgemein könnte also der Fall

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m : \quad &\vec{x} \to \vec{u} \to \vec{f} \\ \Leftrightarrow &\vec{f} = \vec{f}(\vec{u}(\vec{x}))\end{aligned}$$

vorliegen. Dann ist die Ableitung der Funktion $\vec{f}$ nach dem Argument $\vec{x}$ komponentenweise gegeben durch:

$$\partial_{x_i} f_m(\vec{u}) = \sum_n \underbrace{\partial_{u_n} f_m(\vec{u})}_{(J_{\vec{f}}(\vec{u}))_{mn}} \underbrace{\partial_{x_i} u_n(\vec{x})}_{(J_{\vec{u}}(\vec{x}))_{ni}}$$

Hierbei haben wir die jeweiligen Komponenten der Jacobimatrizen identifiziert. Das gleiche können wir für die linke Seite machen und erhalten die verallgemeinerte **Kettenregel**:

$$J_{f\circ u}(\vec{x}) = J_f(\vec{u})\, J_u(\vec{x})$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(u,v) = u^2\, v; &\quad (u,v) = (y+x, y^3) \\ J_{f\circ(u,v)}(x,y) &= J_f(u,v) J_{(u,v)}(x,y) \\ &= (2uv,\, u^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \\ &= (2uv,\, 2uv + 3y^2u^2) = \big(2(x+y)y^3\ ,\ 2(x+y)y^3 + 3y^2(x+y)^2\big)\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die Ausdrücke für u und v direkt in f einsetzt und den Gradienten bzgl. der Variablen x und y bestimmt.

3 Satz über implizite Funktionen

Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei weiter $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $y \in R^m$ mit $(x,y) \in D$. Ist $(x^*,y^*) \in D$ Lösungspunkt der Gleichung $g = 0$, d.h. es gilt $g(x^*,y^*) = 0$. Ist die Jacobimatrix

$$J_g(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x^*,y^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(x^*,y^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(x^*,y^*) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_m}(x^*,y^*) \end{pmatrix}$$

invertierbar, dann gibt es Umgebungen U von x^* und V von y^*, wobei $U \times V \subset D$ ist, in denen eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion f: $U \rightarrow V$ mit $f(x^*) = y^*$ und $g(x,f(x)) = 0$ für alle $x \in U$ existiert. D.h. die implizite Gleichung g(x,y) lässt sich in diesem Punkt nach y auflösen: $y(x) = f(x)$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} J_g(x) &= -J_g(y)J_f(x) \quad \text{(Kettenregel)} \\ J_f(x) &= -J_g(y)^{-1}J_g(x) \end{aligned}$$

Ohne die Funktion f zu kennen, können iwr also auf die Jacobische von f schließen.

Beispiel: Wir haben eine Funktion mit zwei Veränderlichen x und y vorliegen.

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

Eine mögliche Lösung wäre $(x,y) = (0,1)$. Das totale Differential der Funktion g nach x ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= -(\frac{\partial g}{\partial y})^{-1}\frac{\partial g}{\partial x} \\ &= -\frac{2x}{2y} \end{aligned}$$

In Punkten, wo $\frac{\partial y}{\partial x}$ existiert, ist die implizite Gleichung $(*)$ nach y auflösbar. Das sind hier alle Punkte, die $(*)$ erfüllen außer der Punkt $(x,y) = (1,0)$.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE Sommersemester 2009
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\, x^2e^y + \sin x\big) =: (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.
Da die partiellen Ableitungen von f

$$\begin{aligned}
(f_1)_x(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_1)_y(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_1)_z(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_2)_x(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\
(f_2)_y(x,y,z) &= x^2e^y,\\
(f_2)_z(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist f stetig partiell differenzierbar und damit auch differenzierbar. Für die Ableitung von f ergibt sich

$$\begin{aligned}
f'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} (f_1)_x(x,y,z) & (f_1)_y(x,y,z) & (f_1)_z(x,y,z) \\ (f_2)_x(x,y,z) & (f_2)_y(x,y,z) & (f_2)_z(x,y,z) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\, y^4 + 3x^2\sin y,\, 4y - x^3\big)$
Auch hier sind sämtliche partiellen Ableitungen von f stetig, so dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

c) $f\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\varphi,\theta) = \big(r\,\cos\varphi\,\cos\theta,\, r\,\sin\varphi\,\cos\theta,\, r\sin\theta\big)$
Wiederum ist f stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar. Die Ableitung von f lautet

$$f'(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta & -r\,\sin\varphi\,\cos\theta & -r\cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta & r\,\cos\varphi\,\cos\theta & -r\sin\varphi\,\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi,\theta) \in (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2).$$

Bemerkung: Es gilt $\det f'(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta$ ($\to$ Kugelkoordinaten).

d) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$
Wegen $x^y = e^{y\ln x}$ gilt $f_x(w,x,y,z) = e^{y\ln x}y/x$ und $f_y(w,x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$f'(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \end{pmatrix}, \quad (w,x,y,z) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2

a) Bei der Funktion f ergibt sich für eine Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wegen $f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}.$$

Ist v so gewählt, dass $v_1 v_2 \geqslant 0$ gilt, dann hat man $tv_1 \cdot tv_2 \geqslant 0$ für alle $t \neq 0$ und damit nach Definition von f

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1}{t} = v_1.$$

Ist dagegen $v_1 v_2 < 0$, so erhält man $tv_1 \cdot tv_2 < 0$ für alle $t \neq 0$, also

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1 + tv_2}{t} = v_1 + v_2.$$

Für die Funktion f existieren folglich alle Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)$.

b) Wir bestimmen zunächst $f'(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0,y_0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -1 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0,y_0)v = \frac{\partial f}{\partial v} f(x_0,y_0) = 2.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := f_x(x_0, y_0)$ und $\beta := f_y(x_0, y_0)$, so ist $f'(x_0, y_0) = (\alpha\ \ \beta)$, also $f'(x_0, y_0)u = \alpha + 2\beta$ und $f'(x_0, y_0)v = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen liefern daher

$$\alpha + 2\beta = -1 \qquad \text{und} \qquad -\alpha + \beta = 2.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Folglich ist $f'(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3}\ \ \frac{1}{3})$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0,y_0) = f'(x_0,y_0)w = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{4}{3}.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung h gegeben durch

$$h = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x,y) \neq (0,0)$ und $z := \max\{|x|,|y|\}$, so gilt

$$|f(x,y)| = \left| \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \frac{|y^3| + |x^2 y|}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{z^3 + z^3}{z^2} = 2z = 2\max\{|x|,|y|\},$$

und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haben wir also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix}.$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3-0}{0+h^2} = 1\,.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,x) &= \frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 0 = f_x(0,0)\,, \\ f_y(x,0) &= \frac{-x^4+0+0}{(x^2+0)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 1 = f_y(0,0) \end{aligned}$$

ist weder f_x noch f_y im Punkt $(0,0)$ stetig.

d) Es sei $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+hv)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1,hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3-(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3-h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \iff 2v_1^2v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen v gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste die Gleichung für alle Richtungen gelten. Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar mit

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Für die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\sin(|t|^{-1})-0}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(|t|^{-1}) = 0,$$

weil $\sin(|t|^{-1})$ beschränkt ist, und aufgrund von $f(x,y) = f(y,x)$ ist $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $(0,0)$, wenn es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, also $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, gibt mit

$$\frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - A\binom{h_1}{h_2}|}{\|\binom{h_1}{h_2} - \binom{0}{0}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,. \qquad (*)$$

Wegen $f_x(0,0)=0$ und $f_y(0,0)=0$ ist $A=(0\;\;0)$ unser Kandidat für die Ableitung von f in $(0,0)$. In der Tat ist $(*)$ für dieses A erfüllt, denn es gilt $f(0,0)=0$ und $A\binom{h_1}{h_2}=0$ sowie

$$\frac{|f(h_1,h_2)|}{\|\binom{h_1}{h_2}\|}=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\|\tbinom{h_1}{h_2}\|\sin\frac{1}{\|\binom{h_1}{h_2}\|}\xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}}0\,.$$

b) Für die partielle Ableitung von f nach x ergibt sich im Fall $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2x\sin(x^2+y^2)^{-1/2}+(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2x\\&=2x\sin(x^2+y^2)^{-1/2}-x(x^2+y^2)^{-1/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}\,.\end{aligned}$$

Damit hat man für $x\neq 0$

$$f_x(x,0)=2x\sin(|x|^{-1})-x|x|^{-1}\cos(|x|^{-1})\,.$$

Ist $x_k:=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{N}$, gesetzt, so strebt $x_k\to 0$ für $k\to\infty$, allerdings konvergiert $f_x(x_k,0)=2\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi)-\cos(k\pi)=-(-1)^k$ für $k\to\infty$ nicht. Folglich ist f_x in $(0,0)$ nicht stetig. Aus Symmetriegründen ($f(x,y)=f(y,x)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) gilt dies auch für f_y.

Bemerkung: Die Funktion f ist ein Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar ist, jedoch nicht stetig partiell differenzierbar ist. Wenn man also weiß, dass eine Funktion nicht stetig partiell differenzierbar ist, dann kann man keine Aussage über Differenzierbarkeit treffen.

Aufgabe 5

a) Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$$

gilt $|f(x,y)|\leqslant|xy|$ und damit folgt $f(x,y)\to 0=f(0,0)$ für $(x,y)\to(0,0)$.

b) Für $(x,y)\neq(0,0)$ ist

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\,,\end{aligned}$$

und wegen $f(x,y)=-f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}f_y(x,y)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-f(y+h,x)+f(y,x)}{h}\\&=-\lim_{h\to0}\frac{f(y+h,x)-f(y,x)}{h}=-f_x(y,x)=-\frac{y^4x+4y^2x^3-x^5}{(y^2+x^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Für $(x,y)\neq(0,0)$ gilt also

$$\operatorname{grad}f(x,y)=\begin{pmatrix}f_x(x,y)\\f_y(x,y)\end{pmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}x^4y+4x^2y^3-y^5\\x^5-4x^3y^2-xy^4\end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

und

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0\,.$$

Somit ist $\operatorname{grad}f(0,0)=(0,0)$.

c) Es ist

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2+0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 + 0 - h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 & x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|,|y|\}$. Es gilt

$$|f_x(x,y)| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6\max\{|x|,|y|\}\,.$$

Damit folgt $f_x(x,y) \to 0 = f_x(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass f_y in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sein, denn sonst müssten f_{yx} und f_{xy} nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach **c)** nicht der Fall ist.

Aufgabe 6

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar.
Für f mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x,y) &= g'\big(f(x,y)\big)\cdot f'(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Für die Funktion $h\circ g$ erhält man

$$\begin{aligned}(h\circ g)'(x,y) &= h'\big(g(x,y)\big)\cdot g'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(h \circ g)'(x,y)$ die Matrix

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2,y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\, e^{x^2+y^2}\big) =: (u_1(x,y), u_2(x,y))$$

erhalten wir

$$(g \circ f)'(x,y) = \begin{pmatrix} (u_1)_x & (u_1)_y \\ (u_2)_x & (u_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$h \circ g(x,y) = h(g(x,y)) = h\big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big) = \big(e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}), \sinh(\sin(xy))\big) =: (v_1(x,y), v_2(x,y))$$

und für die Ableitung ergibt sich

$$(h \circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} (v_1)_x & (v_1)_y \\ (v_2)_x & (v_2)_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion g muss stetig differenzierbar sein, es muss $g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ gelten, und die Matrix $g'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ muss regulär sein. Überprüfen wir diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$g(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\ \cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x\ \cos y & -\cosh x\ \sin y \\ \cosh x\ \sin y & \sinh x\ \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$\big(g^{-1}\big)'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(g'(g^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion g ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det g'(x,y) = (\sinh x\ \cos y)^2 + (\cosh x\ \sin y)^2.$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x\, \cos y = 0$ und $\cosh x\, \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $g'(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit.

Die Funktion g ist aber nicht injektiv wegen $g(x, y + 2\pi) = g(x,y)$.

Aufgabe 8

a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy}\begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$f(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$f'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0,0) + 2v_y(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0,0) + 8v_y(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0,0) = v_y(0,0) = 0$.