UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
04.06.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, in $x^0 = (1,-1,0)$.

b) Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)\, e^{x-y}$, in $x^0 = (0,0)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$

Aufgabe 3

Es sei $Q := [0,5] \times [0,5] \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x,y) = x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2\,.$$

Begründen Sie, dass f auf Q Maximum und Minimum besitzt, und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 4

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y,z) = (z^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Bestimmen Sie Minimum und Maximum von f auf der Menge

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}.$$

Hinweis: Wenn Sie f auf dem Rand von B untersuchen, dann können Sie dies vereinfachen, indem Sie f dort geeignet darstellen.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange diejenigen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, die vom Punkt $(-1,1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Geben Sie die Abstände an.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die globalen Extrema von

$$f(x,y,z) := 5x + y - 3z$$

auf der Menge $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Aufgabe 7

Das Vektorfeld $\vec{g}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\,.$$

Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von $\vec{g}$.

Aufgabe 8

Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.

b) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,.$$

Aufgabe 9

Ein C^2-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ heißt *radialsymmetrisch*, falls $f(\vec{x})$ nur von $\|\vec{x}\|$ abhängt, d.h. falls $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ gilt.
In diesem Falle gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\Delta f(\vec{x}) = F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,.$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Formel aus Aufgabe **8 b)**.

Übungsklausur Die Übungsklausur zur HM II findet am **Samstag, den 20.06.2009, von 9:00 bis 11:00 Uhr** statt. Wer daran teilnehmen möchte, muss sich im Zeitraum vom 08.06.2009 bis 15.06.2009 in die Listen eintragen, die am Schwarzen Brett neben Raum 3A-17 (Allianzgebäude) aushängen.

ACHTUNG: Es gibt eine spezielle Liste für Studierende der Diplom- oder Lehramtsstudiengänge Physik oder Chemie, die einen Übungsschein benötigen.

Bitte beachten Sie die Hinweise zur Übungsklausur auf der Vorlesungshomepage.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **4, 6, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.