Blatt 7

Tutorium HM 2

6. Juni 2009

Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.

Auf diesem Blatt findet sich viel neues: Taylorentwicklung von Funktionen mehrerer Veränderlicher, Bestimmung von Extrema einer Funktion ohne und mit Nebenbedingungen, Differentialoperatoren Divergenz und Rotation.

1 Taylorentwicklung - A1

Nehmen wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ her, wobei $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ sei. Wir wollen nun die Funktion um den Punkt $(x^0, y^0)^T$ Taylorentwickeln.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}^0) + (\nabla f(\vec{x}^0))^T(\vec{x} - \vec{x}^0) \\ &+ \frac{1}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^T \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}}_{H_f} (\vec{x} - \vec{x}^0) + Rest \quad (*) \end{aligned}$$

Der Beweis dieser Reihe ist analog dem in einer Dimension. Dort hatten wir für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Taylorentwicklung um den Punkt x_0 wie folgt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \; Rest$$

Wie wir im letzten Tutorium gelernt haben, ist die Ableitung einer Funktion mehrerer Veränderlicher gerade die Jacobimatrix. Aus dem eindimensionalen Fall folgern wir also folgende Zuordnungen für eine skalare Funktion, definiert auf dem $\mathbb{R}^2$ (s.o.):

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\longrightarrow J_f(\vec{x}_0) = (\nabla f(\vec{x}_0))^T \\ f''(x_0) &\longrightarrow J_{J_f}(\vec{x}_0) = J_{\nabla f}(\vec{x}_0) = H_f(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Letztere Matrix identifizieren wir gerade als die Hessematrix H_f.

Der Rest in $(*)$ beginnt mit dritter Ordnung in $(\vec{x}-\vec{x}^0)$. Die dort auftauchenden dritten Ableitungen $\partial_i\partial_j\partial_k f$ können nun nicht mehr in gleicher Weise in eine Matrix, wie die Hessematrix H_f gepackt werden. Was immer geht, ist die Schreibweise in Indizeschreibweise:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}^0) + \sum_i \partial_i f(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0) \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{ik} \partial_i\partial_k f(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) \\ &+ \frac{1}{3!}\sum_{ijk} \partial_i\partial_j\partial_k f(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) \\ &+ Rest \end{aligned}$$

Wie man leicht erkennt, tauchen hier Terme mehrfach auf. Ein Anliegen wäre also, die Reihe nach Termen $(x_1 - x_1^0)^{j_1}$ ... $(x_n - x_n^0)^{j_n}$ zu ordnen, d.h.

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_n=k} c_{j_1\ldots j_n}(x_1 - x_1^0)^{j_1}\cdots(x_n - x_n^0)^{j_n}$$

Die Koeffizienten $c_{j_1\ldots j_n}$ gilt es nun zu bestimmen. Das geschieht einfach durch Betrachten der Ableitungen $\partial_1^{j_1}\cdots\partial_n^{j_n} f(\vec{x}^0)$. Mit $|\vec{x}-\vec{x}^0| << 1$ ist offensichtlich:

$$\begin{aligned} \partial_1^{j_1}\cdots\partial_n^{j_n} f(\vec{x}) &= c_{j_1\ldots j_n}(j_1!\ldots j_n!) + O((\vec{x}-\vec{x}^0)) \\ &\to c_{j_1\ldots j_n}(j_1!\ldots j_n!) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

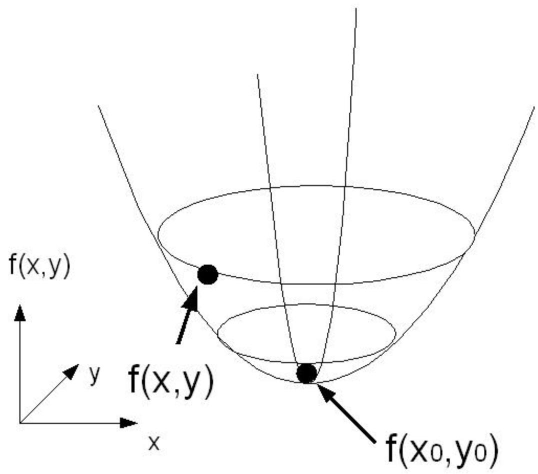
$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_n=k} \frac{1}{j_1!\ldots j_n!}(x_1 - x_1^0)^{j_1}\cdots(x_n - x_n^0)^{j_n}\,\partial_1^{j_1}\cdots\partial_n^{j_n} f(\vec{x}_0)$$

Oft braucht man sich aber nicht dieser Gleichung bedienen. Es reicht meist die Kenntnis der Tayolentwicklung im Eindimensionalen.

Beispiel: Entwickle die Funktion $f(x,y) = e^x sinh(y)$ nach zweiter Ordnung um den Punkt (0,0):

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x sinh(y) \\ &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots)(y + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots) \\ &= y + xy + O^3 \end{aligned}$$

2 Extrema - A2,3



Man nennt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}$ einen stationären Punkt, falls $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$, mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nämlich dann sind offensichtlich alle Tangentialvektoren waagerecht. Entwickeln wir die skalare Funktion um den stationären Punkt $\vec{x}_0$, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \\
&+ \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}_{=0} \\
&+ \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{11} f & \cdots & \partial_{1n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f & \cdots & \partial_{nn} f \end{pmatrix}}_{H_f} (\vec{x} - \vec{x}_0) + ...
\end{aligned}
$$

Uns interessiert nur die Differenz $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|$. Diese ist größer Null, wenn die Hessematrix H_f **positiv definit** ist (**lokales Minimum**) und kleiner null, wenn sie **negativ definit** ist (**lokales Maximum**). Ist die indefinit im Punkt $\vec{x}_0$, so liegt ein Sattelpunkt vor. Sucht ihr das globale Maximum oder Minimum einer Fläche, so sind natürlich auch die Ränder in Betracht zu ziehen.

3 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen - A5

Im Fall, dass der Punkt $\vec{a}$ bestimmt werden soll, für den $f(\vec{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ extremal wird, gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten.

3.1 Explizit

Wir lösen die Nebenbedingung $g(x_1, ..., x_n) = 0$, falls möglich, nach einer Variablen $x_i = h(x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ auf und lösen das Problem

$$f(x_1, ..., h(x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n), ...x_n) = extremal!$$

3.2 Parametrisierung

Können wir die Nebenbedingung z.B. durch eine Kurve Parametrisieren: $g(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(t)$, so reduziert sich das Problem aufs Eindimensionale:

$$f(\vec{x}(t)) = f(t) = extremal! \rightarrow \dot{f}(t) = 0$$

3.3 Lagrange-Multiplikatorregel

Sei $g(\vec{x}) = 0$ die Nebenbedingung, unter der $f(\vec{x})$ extremal werden soll. Sei g nach einer Variablen x_n lokal umkehrbar: $x_n = h(x_1, ...x_{n-1})$. Dann gilt es nur noch das Problem

$$f(x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ...x_{n-1})) = extremal!$$

zu lösen. Das Maximum sei in $(x_1, ...x_{n-1}) = (a_1, ...a_{n-1})$ Anwendung der Kettenregel liefert für eine Komponente des Gradienten:

$$0 = \partial_i f(\vec{a}) + \partial_n f(\vec{a})\, \partial_i h(a_1, ..., a_{n-1})$$

Mit $0 = \frac{dg}{dx_i} = \partial_i g + \partial_n g\, \partial_i h$ folgt

$$0 = \partial_i f(\vec{a}) - \partial_n f(\vec{a})\, \frac{\partial_i g(\vec{a})}{\partial_n g(\vec{a})}$$

Sei $\lambda := -\frac{\partial_n f(\vec{a}}{\partial_n g(\vec{a})}$. Dementsprechend müssen nur noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_i f(\vec{a}) - \lambda \partial_i g(\vec{a}) &= 0 \quad i = 1, 2, ... \\ g(\vec{a}) &= 0 \end{aligned}$$

gelöst werden. Das sind n Gleichungen für n Variablen. Die Lagrange-Multiplikatormethode ist auf beliebig viele Nebenbedingungen $g_l(\vec{x}) = 0 \quad (l = 1...k)$ erweiterbar. Sei

$$H(\vec{x}, \{\lambda_l\}) = f(\vec{x}) + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l g_l(\vec{x})$$

, dann gilt es das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\partial_1 H &= \partial_1 f(\vec{x}) + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \partial_1 g_l(\vec{x}) = 0 \\
&\vdots \\
\partial_n H &= 0 \\
\partial_{\lambda_1} H &= g_1(\vec{x}) = 0 \\
&\vdots \\
\partial_{\lambda_k} H &= g_k(\vec{x}) = 0
\end{aligned}$$

zu lösen.

4 Rotation und Divergenz - A7

Diese Begriffe sind sicherlich schon in der Elektrodynamik gefallen, spätestens durch die Einführung der Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}
\end{aligned}$$

Wir fassen zunächst deren Definitionen zusammen:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \partial_i v_i}_{Skalarprodukt} \\
[\nabla \times \vec{v}]_i &= \underbrace{\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j v_k}_{Kreuzprodukt}
\end{aligned}$$

Was hat es anschaulich mit den Operatoren Rotation $\nabla\times$ und Divergenz $\nabla\cdot$ auf sich?. Sei $\vec{v}$ z.B. ein Geschwindigkeitsfeld, so führt $\nabla \times \vec{v} = 0$ zu der Bedingung, dass das Feld

$\vec{v}$ wirbelfrei ist.
Beweis:

$$\int_\sigma dS \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{v} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{v}$$
$$\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{v} \approx \frac{1}{\sigma} \oint d\vec{r} \cdot \vec{v}$$

Die rechte Seite beschreibt aber gerade die Wirbelstärke des Geschwindigkeitsfeldes. Nehmen wir lokal (d.h. die Fläche σ sei klein) eine rotierende Flüssigkeit an, so kann $v = \omega\, r$ und $\sigma = \pi\, r^2$ gesetzt werden. Das Wegintegral führt dann zu

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{v} &\approx \frac{1}{\sigma} \oint d\vec{r} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{\pi\, r^2} 2\pi r \cdot \omega\, r \\ &= 2\omega \end{aligned}$$

Ist also $\nabla \times \vec{v} = 0$, so ist auch die Winkelgeschwindigkeit des lokalen Wirbels gleich Null. Somit existieren keine Wirbel in der Strömung.
Die Divergenz kann ebenfalls anschaulich in der Strömungslehre behandelt werden. Und zwar schauen wir uns an, welche Menge an einem bestimmten Medium mit Dichte $\rho = \frac{Menge}{Volumen} = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ pro Zeiteinheit durch ein Volumenelement ΔV fließt. Dazu ist es notwendig, den Fluss durch die Oberfläche des Volumenelements zu betrachten. Der Fluss durch ein Oberflächenelement ΔA ist gerade $\frac{\Delta \dot{N}}{\Delta A} = \rho \cdot \vec{v}$. Also ergibt sich die Gesamtmenge des durch die geschlossene Fläche tretenden Mediums durch

$$\dot{N} = \oint dA\, \hat{n} \cdot \rho \cdot \vec{v} = \int dV\, \nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Gauß (kommt später in der VL) verwendet. Danach tritt für $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, d.h. $\dot{N} = 0$ (Teilchenzahl konstant), genauso viel des Mediums durch die Oberfläche ein, wie austritt. Das bedeutet aber nichs anderes, als dass innerhalb des Volumenelements nichts weiteres hinzukommt bzw. weggenommen wird. Also gibt es bei $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ weder Quellen noch Senken.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE Sommersemester 2009
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das zweite Taylorpolynom von f in $x^0 = (1, -1, 0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + \tfrac{1}{2} h^T H_f(x^0) h \,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x, y, z) = e^z\,, \qquad f_y(x, y, z) = -2y\,, \qquad f_z(x, y, z) = xe^z\,.$$

Damit erhalten wir $f_x(1, -1, 0) = 1$, $f_y(1, -1, 0) = 2$ und $f_z(1, -1, 0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{xz} = e^z\,, \quad f_{yy} = -2\,, \quad f_{yz} = 0\,, \quad f_{zz} = xe^z\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0\,, \qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1, h_2, h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_3\big) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2}h_3^2 + h_1h_3\,.$$

Schreibt man $h = (x, y, z) - x^0 = (x - 1, y + 1, z)$, so erhält man

$$(x - 1) + 2(y + 1) + z - (y + 1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x - 1)z\,.$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{llcl}
f(x,y) & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) = 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) = 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) = 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) = 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) = -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \sin y - 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) = 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \cos y + 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) = 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x \sin y - 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) = -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x \sin y + 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) = 2
\end{array}$$

Damit ist für $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned}
T_{3,(0,0)}(h) &= f(0,0) + \tfrac{1}{1!}\,(h\cdot\nabla)f(0,0) + \tfrac{1}{2!}\,(h\cdot\nabla)^2 f(0,0) + \tfrac{1}{3!}\,(h\cdot\nabla)^3 f(0,0) \\
&= f(0,0) + \sum_{j=1}^{2} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,0) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}(0,0) + \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{2} h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l}(0,0) \\
&= 0 + h_2 + \tfrac{1}{2}\big(h_1h_2 + h_2h_1 + h_2^2(-2)\big) + \tfrac{1}{6}\big(h_1h_2h_2(-2) + h_2h_1h_2(-2) + h_2h_2h_1(-2) + h_2^3 2\big) \\
&= h_2 + h_1h_2 - h_2^2 - h_1h_2^2 + \tfrac{1}{3}\,h_2^3.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $(x, y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x, y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{1}{3}\,y^3.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (y+1, x-2) \overset{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$f_x(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2}.$$

Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ergibt sich daraus $f_y(x,y) = f_x(y,x) = (-4y^2 - 4xy - 6y + 2)e^{-x^2-y^2}$. Kritische Punkte von f sind solche mit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, also mit

$$-4x^2 - 4xy - 6x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4y^2 - 4xy - 6y + 2 = 0. \tag{$*$}$$

Wir ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$4(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0, \qquad \text{also} \qquad (x - y)\big(4(x + y) + 6\big) = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $x - y = 0$ oder $4(x + y) + 6 = 0$. Im ersten Fall, also für $x = y$, folgt aus $(*)$ die Gleichung

$$-8x^2 - 6x + 2 = 0, \qquad \text{also} \qquad x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4} = 0.$$

Diese hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm (\frac{9}{64} + \frac{1}{4})^{1/2}$, d. h. $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.
Im zweiten Fall (für $y = -x - \frac{3}{2}$) wird die erste Gleichung in $(*)$ zu

$$-4x^2 - 4x(-x - \tfrac{3}{2}) - 6x + 2 = 0, \qquad \text{also} \qquad 2 = 0.$$

Es gibt folglich genau zwei kritische Punkte: $(-1,-1)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Nur dort können lokale Extrema von f sein, doch ob tatsächlich Extrema vorliegen, müssen wir noch untersuchen. Dazu betrachten wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (-8x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (8x^3 + 8x^2y + 12x^2 - 12x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2}, \\
f_{yy}(x,y) &= (8y^3 + 8xy^2 + 12y^2 - 4x - 12y - 6)e^{-x^2-y^2}, \\
f_{xy}(x,y) &= -4xe^{-x^2-y^2} - 2y(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (8x^2y + 8xy^2 + 12xy - 4x - 4y)e^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{xy}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 6e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(-1,-1) = 6e^{-2} > 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 20e^{-4} > 0$ ist diese Matrix positiv definit. Somit besitzt f im Punkt $(-1,-1)$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$H_f(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -9e^{-1/8} & -e^{-1/8} \\ -e^{-1/8} & -9e^{-1/8} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -9e^{-1/8} < 0$ und $\det H_f(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 80e^{-1/4} > 0$ ist diese Matrix negativ definit. Im Punkt $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ hat f daher ein lokales Maximum.

Aufgabe 3

Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f nach dem Satz in 19.18 auf Q Maximum und Minimum an.
Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5) \times (0,5)$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5) \times (0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:
$x = 0$: $f(0,y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.
$x = 5$: $f(5,y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.
$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leqslant 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot,0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.
$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3},5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.
Insgesamt erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 4

Die Funktion f ist auf der Menge B stetig. Da B abgeschlossen und beschränkt ist, besitzt f auf B sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.
Wir betrachten zuerst alle Punkte im Inneren von B, in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in (0,1)$. Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2-1)x \\ (z^2-1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2 + z^3 - z \end{pmatrix}.$$

Wegen $z^2 < 1$ sind die ersten beiden Zeilen genau für $x = y = 0$ erfüllt. Mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit $2z\|\vec{v}\| + z^3 - z = z(3z^2 - 1)$. Also gilt die dritte Zeile genau für $z = 1/\sqrt{3}$ oder $z = -1/\sqrt{3}$ (Beachte: $x = y = z = 0$ wird in diesem Fall nicht berücksichtigt). Daher müssen wir im Inneren die Punkte $(0,0,1/\sqrt{3})$ und $(0,0,-1/\sqrt{3})$ untersuchen sowie den Nullpunkt, den wir zuvor ausgeschlossen haben:

$$f(0,0,0) = 0, \qquad f(0,0,-1/\sqrt{3}) = f(0,0,1/\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand ∂B von B zu untersuchen. Dort gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und damit $f(x,y,z) = (z^2 - 1) =: g(z)$ für $z \in [-1,1]$. Wir sehen sofort, dass die Funktion g für $z = -1$ oder $z = 1$ ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Es folgt: -1 ist das Minimum von f auf B und 0 das Maximum.

Ohne die Vereinfachung könnten wir auch folgendermaßen vorgehen:
Ist $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$, definiert, so gilt $\partial B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ h(x,y,z) = 0\}$. Wir berechnen die Extrema von f auf ∂B unter Verwendung der Multiplikatorenregel von Lagrange: h ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, f hingegen nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, allerdings erfüllt $\vec{0}$ die Nebenbedingung $h(\vec{0}) = 0$ nicht. Weiter gilt $h'(x,y,z) = (2x \quad 2y \quad 2z)$, damit ist $\operatorname{rg} h'(x,y,z) = 1$ für alle $(x,y,z) \in \partial B$. Setzen wir $L(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda h(x,y,z)$, so gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange für jeden Punkt $\vec{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, in dem f ein Extremum auf ∂B hat, ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = \nabla L(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda_0 h_x \\ f_y + \lambda_0 h_y \\ f_z + \lambda_0 h_z \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0^2-1)x_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 x_0 \\ (z_0^2-1)y_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 y_0 \\ 2z_0\|\vec{v}_0\| + (z_0^3 - z_0)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 z_0 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem in x_0, y_0, z_0, λ_0 muss man nun lösen. Die globalen Extrema erhält man durch Vergleich der Funktionswerte an den Punkten (x_0, y_0, z_0), die das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 5

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x\\y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1\\1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2+y^2-2x+2y+1 = (x-1)^2+(y+1)^2-1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg}\, h'(x,y) = \operatorname{rg}\big(2(x-1) \quad 2(y+1)\big) \stackrel{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im kritischen Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \Longleftrightarrow x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \qquad \text{und} \qquad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \Longleftrightarrow y = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 6

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

gilt $\operatorname{rg} h'(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch nicht die Nebenbedingungen $h_1(x,y,z) = 0$ und $h_2(x,y,z) = 0$ erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ und damit wäre $x^2+y^2+z^2 = 1$ nicht erfüllt. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4+2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 7

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x,y,z) := \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{v}\,) = f(\nabla \times \vec{v}\,) + (\nabla f) \times \vec{v}$. Offenbar ist $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8 - 2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f) \times \vec{v} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{v}\,) = f(\nabla \cdot \vec{v}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8 - 2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Für $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(g(r,\varphi)) = u \circ g(r,\varphi)$$

mit $g\colon (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r,\varphi) = u'(g(r,\varphi)) \cdot g'(r,\varphi) = \big(u_x(g(r,\varphi)) \quad u_y(g(r,\varphi))\big) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r,\varphi) =: (v_r(r,\varphi) \;\; v_\varphi(r,\varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} v_r(r,\varphi) &= \cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ v_\varphi(r,\varphi) &= -r\sin\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &\quad + \sin\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &= \cos^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad - r\sin\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\ &\quad - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r\cos\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\ &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}(r,\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\, v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \\ &\quad = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) \\ &\quad = u_{xx}(x,y) + u_{xx}(x,y) = \Delta u(x,y) \end{aligned}$$

mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Aufgabe 9

Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definiere $r(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist $f = F \circ r$ und für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial(F \circ r)}{\partial x_k}(\vec{x}) = F'\big(r(\vec{x})\big)\,\frac{\partial r}{\partial x_k}(\vec{x}) = F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(\vec{x}) &= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)x_k \cdot (-1)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^3}\right) F'\big(\|\vec{x}\|\big).
\end{aligned}
$$

Dies führt auf die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\Delta f(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(\vec{x}) \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{n}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^3}\right) F'\big(\|\vec{x}\|\big) \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big).
\end{aligned}
$$