Blatt 8

Tutorium HM 2

9. Juni 2009

Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.

Das Thema dieses Blattes ist diesmal in einem Wort zusammengefasst: Mehrdimensionale Integration. Ihr sollt bei den Tutoriumsaufgaben Wegintegrale und Integrale über definierte Bereiche berechnen.

1 Bereiche im $\mathbb{R}^2$

Ein Bereich $G \in \mathbb{R}^2$ heißt regulär, wenn

- der Rand ∂G aus endlich vielene regulären Kurvenstücken [1] besteht,
- das Innere $B \backslash \partial G$ ein nichtleeres, beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ ist,
- B abgeschlossen, d.h. $\partial G \subseteq G$ ist.

1.1 Normalbereiche

$A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich, wenn es C^1-Funktionen f und g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \geq f(x)$ und

$$A_1 = \{(x, y);\, a \leq x \leq b,\, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Dieser wir auch als Normalbereich vom Typ I bezeichnet. Es gibt dementsprechend also noch einen Typ II, der einfach den umgekehrten Fall beschreibt:

$$A_2 = \{(x, y);\, f(x) \leq x \leq g(x),\, a \leq y \leq b\}$$

[1] Wir erinnern uns: Ein Kurvenstück $\vec{x}(t)$ heißt regulär, wenn $\dot{\vec{x}}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$

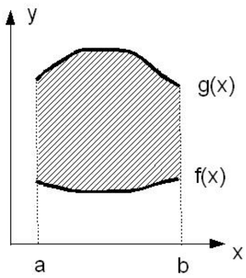


Abbildung 1: Typ I

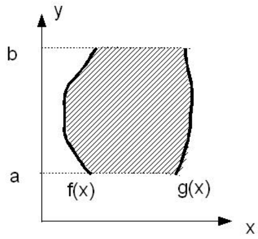


Abbildung 2: Typ II

2 Integration über Normalbereiche - A4,5

Für eine stetige Funktion $h: A_1 \to \mathbb{R}$ auf einem Normalbereich A_1 gilt[2]:

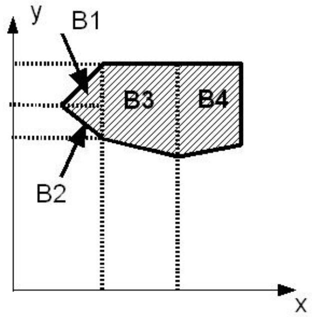
$$\int\int_{A_1} dxdy\, h(x,y) = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy\, h(x,y)$$

Wir integrieren also zunächst über die y-Komponente, die x-Komponente wird fixiert. Danach folgt die Integration über die x-Komponente. Bei einem Normalbereich vom Typ II geschieht das Ganze umgekehrt.

Ist der Rand eines Gebiets nur durch stückweise reguläre Funkionen definiert, so muss das Gebiet G in Normalbereiche $B_1, ...B_N$ zerlegt werden: $G = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$. Die Integration wird dann getrennt über die einzelnen Bereiche durchgeführt:

$$\begin{aligned} I_k &= \int\int_{B_k} dx\, dy\ h(x,y) \\ I &= I_1 + \cdots I_N \end{aligned}$$

[2]analog für A_2



3 Kurvenintegrale - A1

3.1 Skalare Funktion

Beschreibe $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ eine parametrisiserte Kurve γ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine auf dem Kurvenstück $\vec{x}(t)$ mit $t \in [a,b]$ stetige Funktion, dann heißt

$$\int_\gamma ds\, f = \int_a^b f(\vec{x}(t))|\dot{\vec{x}}(t)|dt$$

das Kurvenintegral von f längs $\vec{x}$. Wir erkennen das Bogenelement $ds = |\dot{\vec{x}}(t)|dt$.

3.2 Vektorfeld

Interessiert uns die Arbeit, die notwendig ist, um ein geladenes Teilchen mit Ladung q entlang des Weges $\gamma : \vec{x}(t) \quad t \in [a,b]$ in einem zeitlich konstanten inhomogenen elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{x})$ zu bewegen, so ergibt sich diese gerade durch:

$$W = \int_\gamma d\vec{x} \cdot q\, \vec{E}(\vec{x})$$

Allgemein: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x} : [a,b] \to D$ eine reguläre Kurve und $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\vec{x}} d\vec{x} \cdot \vec{f} = \int_a^b dt \vec{f}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$$

Kurvenintegral von $\vec{f}$ entlang $\vec{x}$.

4

4.1 Gebiet

Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn

- G ist **offen**
- G ist **zusammenhängend**, d.h. zwischen zwei Punkten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ existiert eine reguläre Kurve $\vec{\gamma}: \quad [a,b] \rightarrow G$ mit $\vec{\gamma}(a) = \vec{x}_1$ und $\vec{\gamma}(b) = \vec{x}_2$.

Ein Gebiet heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede geschlossenen, doppelpunktfreie Kurve in G stetig auf einen Punkt in G zusammengezogen werden kann, ohne dass G verlassen wird.

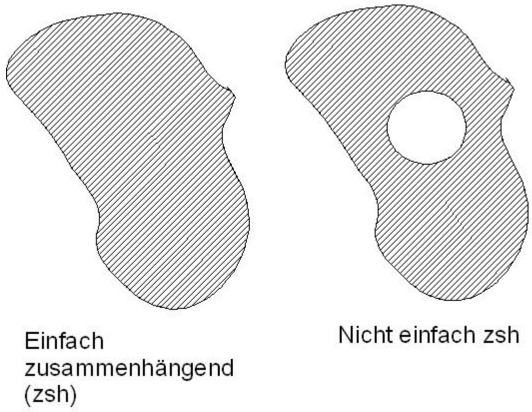


Abbildung 3: Einfach zusammenhängend

4.2 1. Hauptsatz der Kurvenintegrale - A3

Man nennt ein Vektorfeld $\vec{v} \in C^0$ konservativ oder ein Potentialfeld, wenn es eine Funktion $f \in C^1$ gibt mit der Eigenschaft

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}).$$

Erfüllt $\vec{v}$ diese Eigenschaft, so gilt für jede stückweise stetige Kurve γ in einem Gebiet G mit Anfangspunkt $\vec{\gamma}(a)$ und Endpunkt $\vec{\gamma}(b)$

$$\int_{\gamma} d\vec{x} \cdot \vec{v} = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$$

4.3 2. Hauptsatz für Kurvenintegrale - A3

Sei $\vec{v} \in C^1: \quad G \rightarrow R^n$, mit $G \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend. $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$J_v(\vec{x}) = J_v^T(\vec{x})$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

gilt. Letzteres wird klar, wenn man bedenkt, dass $\vec{v} \in C^1$. Damit $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, muss eine Funktion $f \in C^2$ existieren mit $v_i = \partial_i f$. Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\partial_i \partial_k f = \partial_k \partial_i f$$

und damit das Besagte.