UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
18.06.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\right\}.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z \, d(x, y, z)$.

Aufgabe 2

Beschreiben Sie die folgenden Mengen mittels Polar- bzw. Kugelkoordinaten.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\} \qquad (R \geqslant r \geqslant 0)$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant ax\right\} \qquad (R \geqslant 0,\ a > 0)$$

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\right\}$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie für alle $a, b, c > 0$ das Volumen $\iiint\limits_E d(x, y, z)$ des Ellipsoids

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}.$$

b) Berechnen Sie für die Menge

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leqslant z \leqslant 1 \ \text{ und } \ x^2 + y^2 \leqslant (1 - z)^2\right\}$$

das Integral

$$\iiint\limits_A (x^2 + y^2)^2 \, e^{2(1-z)^7} \, d(x, y, z)\,.$$

c) Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B \frac{y}{x} \, d(x, y)\,, \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x, y)\| \in [r, R],\ |y| \leqslant x\right\}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\varrho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & \text{für } 0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse $\iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\,d(x,y,z)$.

Aufgabe 5

Die seit Jahren bewährte Marzipankartoffel

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \tfrac{1}{16}\,x^2 + \tfrac{1}{8}\,y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}$$

muss sich dieses Jahr der neuen Marzipankartoffel

$$\widetilde{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \leqslant \sqrt{3-x^2}\,\sqrt{3-y^2}\right\}$$

erwehren, die 3 Prozent billiger angeboten wird. Welche der beiden würden Sie kaufen?

Aufgabe 6

Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}\,do\,.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0,0,1)$, falls $\mathcal{F}$ der durch $0 \leq z \leq 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\,dr = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ln(\sqrt{2}-1)$.

Aufgabe 7

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x,y,z) = (z, y, z+1)$. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Hörsaalverteilung der Übungsklausur am Samstag, den 20.06.2009, von 09:00 bis 11:00:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-J	Carl-Benz-Hörsaal (ehemals HMU)
ETEC/Geodäsie	K-Z	Gottlieb-Daimler-Hörsaal (ehemals HMO)
Physik/Chemie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.