Blatt 9

Tutorium HM 2

17. Juni 2009

Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Sie dient lediglich als Hilfestellung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.

Die Theorie der Bereichsintegrale in zwei Dimensionen können wir natürlich ausweiten auf eine dreidimensionale Integration. Oft ist es dabei sinnvoll die Integrationsvariablen entsprechend dem Problem zu substituieren. Unteranderem das wollen wir uns hier anschauen.

1 Reguläre Bereiche

Wir beschränken uns hier auf reguläre Bereiche des $\mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften

- Der Rand ∂B, d.h. die Oberfläche, besteht aus endlich vielen regulären Flächen
- Das Innere $(B \backslash \partial B)$ ist ein nichtleeres, beschränktes Gebiet
- B ist abgeschlossen, d.h. $\partial B \subseteq B$

Es lässt sich zeigen, dass jeder reguläre Bereich „Riemann-meßbar"ist, d.h. wir können jedem Bereich ein Volumen zuordnen.

2 Das Volumenintegral

Wie im $\mathbb{R}^2$ führen wir die Integration über einen Bereich im $\mathbb{R}^3$ aus, indem wir seine Ränder geeignet parametrisieren. Für den Fall karthesischer Koordinaten seht ihr ein Beispiel in Abbildung 1. Hier ist ein ellipsoidähnliches Gebilde gezeigt. Die beiden Halbschalen dieses körpers sind durch die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ parametrisiert. Es gilt:

$$g(x, y) \leq z \leq f(x, y)$$

Die Projektion des Körpers auf die xy-Ebene liefert die entsprechenden Einschränkungen für die x- und y-Komponente:

$$\begin{aligned} u(x) \leq & y \leq v(x), \\ a \leq & x \leq b. \end{aligned}$$

Letzteres geht natürliche nur, wenn D ein Normalbereich ist. Wir haben also folgendes Schema erhalten, wie wir das Volumenintegral über eine skalare Funktion F ausführen:

$$\begin{aligned} \int_B d(x,y,z)\, F = & \int_D d(x,y) \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} dz\, F(x,y,z) \right) \\ & \underbrace{=}_{D \text{ ist Normalbereich}} \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} dz\, F(x,y,z) \end{aligned}$$

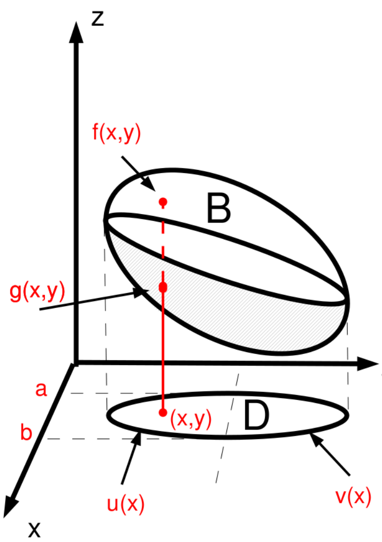


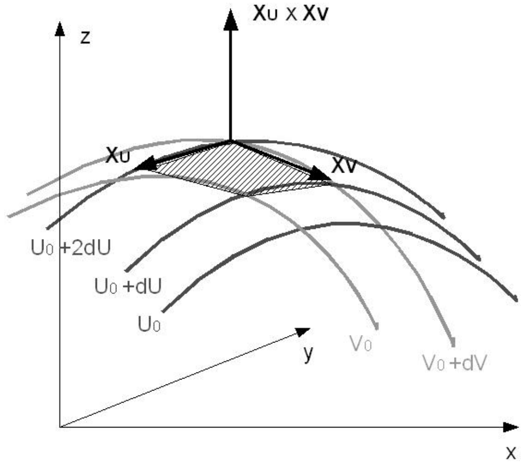
Abbildung 1: Bereichsintegral im $\mathbb{R}^3$

3 Einschub - Flächen im $\mathbb{R}^3$

Flächen im $\mathbb{R}^3$ können entweder implizit durch eine Funktion $f(x_1, \cdots, x_3) = 0$ oder explizit durch eine Parameterdarstellung beschrieben werden. Im $\mathbb{R}^3$ reden wir von einer Fläche, wenn wir die Dimension um eins reduzieren. Die notwendigen Parameter zur Beschreibung einer Fläche sind also zwei. Bei einer Kurve (eine Dimension) war es nur einer.[1]

[1] im $\mathbb{R}^n$ nennt man Teilmengen $\mathbb{R}^{\leq n-1}$ Hyperflächen.

Die Abbildung mit den Parametern (u, v) wird dann beschrieben durch $\vec{x} \rightarrow \vec{x}(u, v)$. Halten wir $v = const$ und variieren u, so ergeben sich offensichtlich für verschiedene Konstanten v unterschiedliche Bahnkurven $\vec{x}(u)$, welche sich nicht kreuzen, falls die Fläche regulär ist[2]. Gleiches gilt für $u = const$. Wir erhalten also Parameterlinien, welche auf der Fläche $\vec{x}(u, v)$ verlaufen.



Der Tangentialvektor an die Parameterlinie mit $v = const$ ergibt sich durch die partielle Differentiation nach dem freien Parameter u. Analoges gilt für $u = const$. Insgesamt ergeben sich die beiden Tangentialvektoren

$$\vec{x}_u := \partial_u \vec{x}(u, v)$$
$$\vec{x}_v := \partial_v \vec{x}(u, v)$$

Eine Tangentialebene im Punkt $\vec{x}(u_0, v_0)$ lässt sich somit einfach durch die Parameterdarstellung

$$\vec{t}(\xi, \zeta) = \vec{x}(u_0, v_0) + \xi \vec{x}_u + \zeta \vec{x}_v, \quad \xi, \lambda \in \mathbb{R}$$

beschreiben.

Der Normalenvektor der Fläche ist stets gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$$

[2]Ein Flächenstück heißt regulär, falls $\vec{x}(u, v) \in C^1$, aus $(u, v) \neq (u', v')$ folgt, dass $\vec{x}(u, v) \neq \vec{x}(u', v')$ und $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq 0$

4 Die Transformationsformel für Volumenintegrale

Oft ist es zweckmäßig die karthesischen Integrationsvariablen zu substituieren. Führt ihr z.B. eine Integration über das Innere einer Kugel mit Radius R aus, so könnt ihr die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

durch Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} sin(\vartheta)cos(\varphi) \\ sin(\vartheta)sin(\varphi) \\ cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

direkt berücksichtigen. Hier macht die Substitution die Integrationsvariablen (nun r, ϑ, φ) voneinander unabhängig, was die Integration erheblich vereinfacht. Zu beachten ist, dass sich durch die Transformation aber auch das infitesimale Element $d(x, y, z) = dx\, dy\, dz$ verändert. Für Kugelkoordinaten können wir uns das einfach graphisch veranschaulichen (siehe Abbildung 2).

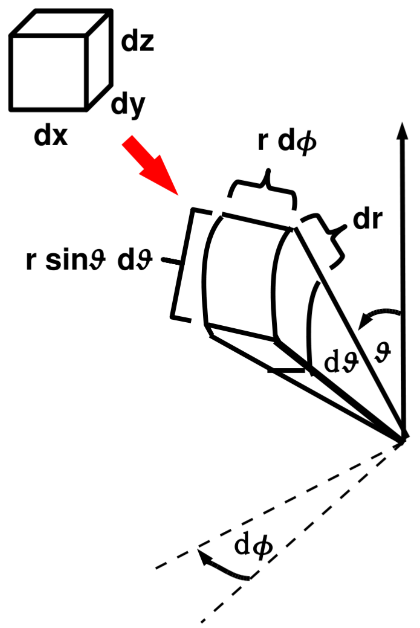


Abbildung 2: Volumenelement bei Transformation

Wir entnehmen der Abbildung für die Transformation des Volumenelements:

$$dx \cdot dy \cdot dz \rightarrow r^2\, sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

Wir sind interessiert an einer Transformationsregel für beliebige Transformationen. Betrachten wir folgende Koordinatentransformation auf dem Bereich B:

$$U \to B: \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \to \vec{x}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

und schauen uns nun das Volumenelement eines Quaders im Raum U an. Es ist gegeben durch $\Delta V = \Delta u\, \Delta v\, \Delta w$. Eine Transformation in den Bereich B geht damit einher, dass sich der Quader zu einem Spat verformt. Dieser wird nun aufgespannt durch die Vektoren $\partial_u \vec{x}\, \Delta u$, $\partial_v \vec{x}\, \Delta v$ und $\partial_w \vec{x}\, \Delta w$ (siehe 3. Einschub - Flächen). Das Volumen dieses Spats kennen wir:

$$\begin{aligned} \Delta V &= ||\partial_u \vec{x} \cdot (\partial_v \vec{x} \times \partial_w \vec{x})|| \Delta u \Delta v \Delta w \\ &= |J_{\vec{x}}(u,v,w)| \Delta u \Delta v \Delta w \end{aligned}$$

Damit haben wir eine allgemeine Transformationsregel hergeleitet:

$$dV = dx\, dy\, dz = det(J_{\vec{x}}(u,v,w)) du\, dv\, dw$$

Beispiele:

- Affine Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}^{3\times 3}} \underbrace{\vec{u}}_{(u,v,w)^T} + \vec{x}_0 \\ \to \int_B d(x,y,z)\, f(\vec{x}) &= \int_U d(u,v,w)\, |det(A)|\, f(A\vec{u} + \vec{x}_0) \end{aligned}$$

- Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (r\, cos\varphi, r\, sin\varphi, z) \to det(J_{\vec{x}}) = r \\ \to \int_B d(x,y,z)\, f(\vec{x}) &= \int_U d(r,\varphi,z)\, r\, f(r\, cos\varphi, r\, sin\varphi, z) \end{aligned}$$

Meine Empfehlung an euch: Wenn ihr euch unsicher seit, schaut euch doch einfach ein paar Beispiele im Repititorium an (S. 490 ff).