UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
25.06.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2\big\}$ und γ der positiv orientierte Rand von G.

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von γ mittels Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G. (*Hinweis*: Leibnizsche Sektorformel)

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \big\{(x,y,x^2+y^2) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$.

Aufgabe 3

Die Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(u,v) : (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ mit $\vec{g}(u,v) := (u+v, u-v, 2uv)$. Weiter sei $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 4\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Aufgabe 4

Die Funktion $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar.

a) Geben Sie eine Bedingung für $\vec{v}$ an, die erfüllt sein muss, wenn ein Vektorfeld $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert mit $\nabla \times \vec{w} = \vec{v}$.
(Man nennt $\vec{w}$ in diesem Falle ein *Vektorpotential* von $\vec{v}$.)

b) Überprüfen Sie diese Bedingung für

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie ein Vektorpotential $\vec{w}$ von $\vec{v}$.

Hinweis: Es gibt ein Vektorpotential $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ mit $w_3 = 0$.

Aufgabe 5

Es sei $\partial\mathcal{F}$ der positiv orientierte Rand der Fläche

$$\mathcal{F} = \big\{(x,y,y^2-x^2) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 3\big\}.$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-5y \\ 9x-3z \\ y-2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Gegeben seien $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+(z+2)^2 \leqslant 3, \; z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2, \; x \geqslant 0\big\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y+z^2 \\ x-2z \\ -2xz+2y+2z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N} \, do\,,$$

wobei $\mathcal{F}$ die Oberfläche von B und $\vec{N}$ der äußere Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 7

Die Oberfläche von $Z := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \leqslant 1, \; 0 \leqslant z \leqslant 1\big\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, und es sei

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do$$

(wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 8

Gegeben sei die Menge

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \; z \geqslant 0\big\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie den Gaußschen Integralsatz anhand dieses Beispiels, d.h. berechnen Sie

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{v} \, d(x,y,z) \qquad \text{sowie} \qquad \iint\limits_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂V bezeichnet.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 21.09.2009,** statt.
Anmeldeschluss ist Freitag, der 24.07.2009 (Vorlesungsende SS 2009).
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1weis/lehre/hm22009s/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 6 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.