UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
02.07.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(t) = t^n$.

a) Begründen Sie, dass die Laplacetransformierte $\mathscr{L}\{f_n\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ existiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ gilt.

Aufgabe 2

Sei $a > 0$ und $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung γ. Zeigen Sie, dass die Funktion $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa ist und dass gilt

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > \gamma a\,.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie jeweils die Laplacetransformierte $\mathscr{L}\{f\}$ der Funktion $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

a) $f(t) = e^{at}(t^2 + bt + c) \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

b) $f(t) = \cos(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

c) $f(t) = \sinh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

d) $f(t) = \sinh^2(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

e) $f(t) = \begin{cases} t/5\,, & t \in [0,5] \\ 6 - t\,, & t > 5 \end{cases}$

f) $f(t) = \begin{cases} \cos(t-7)\,, & t \geqslant 7 \\ 0\,, & t \in [0,7) \end{cases}$

g) $f(t) = \begin{cases} e^{t-1}\sin(t-1)\,, & t \geqslant 1 \\ 0\,, & t \in [0,1) \end{cases}$

h) $f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \leqslant t < 1 \\ 2 - t\,, & 1 \leqslant t < 2 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$

i) $f(t) = e^{at}\sin(bt) \quad (a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Funktion $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit

a) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s-a} \quad (a \in \mathbb{C})$;

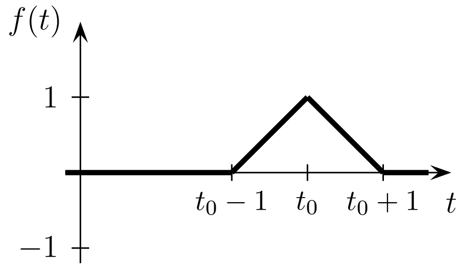
b) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}$;

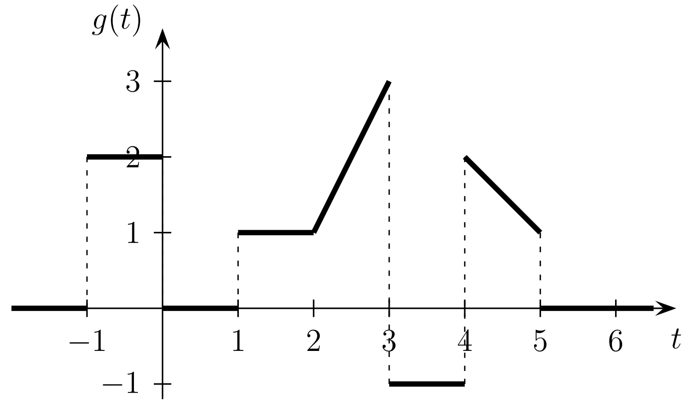
c) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$.

— bitte wenden —

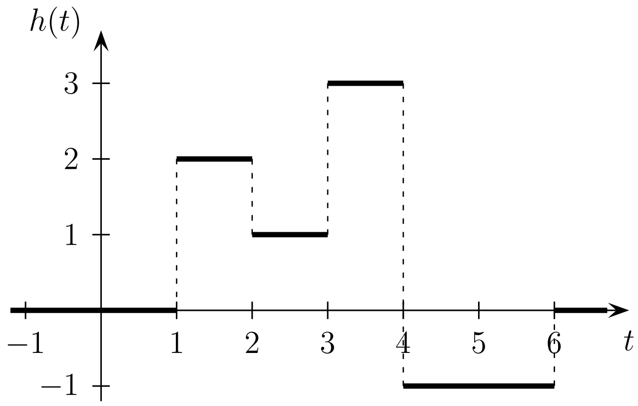
Aufgabe 5

Stellen Sie die Funktionen f und g mit Hilfe des Einheitssprungs σ in einem geschlossenen Ausdruck dar.





Ermitteln Sie die Laplacetransformierte der unten dargestellten Funktion h.



Aufgabe 6

Es sei $p\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion und $\varepsilon > 0$ beliebig. Begründen Sie, dass p von exponentieller Ordnung ε ist.

Aufgabe 7

Ermitteln Sie eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

für alle $t \geqslant 0$ genügt.

Aufgabe 8

Sei $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt und $v := u + \sigma * u$. Lösen Sie diese Gleichung nach u auf.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 21.09.2009,** statt.
Anmeldeschluss ist Freitag, der 24.07.2009 (Vorlesungsende SS 2009).
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage
`www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1weis/lehre/hm22009s/`.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 5, 6 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.