UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir zeigen zuerst: Ist $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Funktion $f_n(t) := t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Stellen wir die Exponentialfunktion als Potenzreihe dar, erhalten wir

$$e^{\varepsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} = 1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} + \ldots \geqslant \frac{(\varepsilon t)^n}{n!}$$

für alle $t \geqslant 0$. Folglich ergibt sich mit $M := \frac{n!}{\varepsilon^n}$ die Abschätzung

$$t^n \leqslant M e^{\varepsilon t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Also ist die Funktion f_n von exponentieller Ordnung ε.

Gegeben seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s_0) > 0$. Wir wollen die Existenz von $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$ nachweisen.

Wie eben gesehen, ist $f_n(t) = t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist dann f_n von exponentieller Ordnung $\varepsilon_0 := \mathrm{Re}(s_0)/2$. Nach Satz 23.4 konvergiert daher das Integral $\int_0^\infty f_n(t) e^{-st}\,dt$ (sogar absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \varepsilon_0$. Aufgrund von $\mathrm{Re}(s_0) > \varepsilon$ existiert demnach $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$.

b) Die Behauptung zeigen wir durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 0$ gilt

$$\mathscr{L}\{f_0\}(s) = \mathscr{L}\{t^0\}(s) = \mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}\,.$$

IS: Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte: $\mathscr{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ (IV). Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_{n+1}\}(s) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^{n+1}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\, t^{n+1}\right]_{t=0}^b + \frac{n+1}{s} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^n\,dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s} \mathscr{L}\{f_n\}(s) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n+1}{s}\,\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{(n+1)+1}}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $a > 0$. Da f von exponentieller Ordnung γ ist, gibt es eine Konstante $M > 0$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant M e^{\gamma x}$$

für alle $x \geqslant 0$ gilt. Setzen wir in diese Ungleichung at für x ein, dann erhalten wir

$$|f(at)| \leqslant M e^{(\gamma a)t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Damit ist $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa, und deshalb konvergiert $\mathscr{L}\{f(at)\}(s)$ (absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma a$. Mit Hilfe der Substitution $\tau = at$ erkennen wir

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(at)\,dt = \frac{1}{a} \lim_{b\to\infty} \int_0^{ab} e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{a}\mathscr{L}\{f\}\Big(\frac{s}{a}\Big)\,.$$

Aufgabe 3

a) Mit $g(t) := t^2 + bt + c$ erhält man nach Aufgabe 1 aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{t^2\}(s) + b\,\mathscr{L}\{t\}(s) + c\,\mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,,$$

und wegen $f(t) = e^{at}g(t)$ gilt dann nach der Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3} + \frac{b}{(s-a)^2} + \frac{c}{s-a} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > a\,.$$

b) Wir benutzen die Darstellung $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-i\omega) + \mathscr{L}\{\sigma\}(s+i\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+i\omega)+(s-i\omega)}{s^2 - i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: a) Mit $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ erhält man $\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$.
b) Alternativ könnte man $\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}$ im Fall $\omega > 0$ auch mit $\mathscr{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$ und dem Skalierungsresultat aus Aufgabe 2 berechnen: Hiernach gilt nämlich für jedes $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\mathscr{L}\{\cos(t)\}\Big(\frac{s}{\omega}\Big) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

c) Es ist $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-\omega) - \mathscr{L}\{\sigma\}(s+\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{s^2-\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Wir mussten hier $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ fordern, damit sowohl $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ als auch $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > \omega$ vor, entsprechend konvergiert $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > -\omega$. Beide Bedingungen an s sind für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ erfüllt.

d) Wir drücken die Funktion f zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}\,.$$

Damit folgt für $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$ (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$4\,\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{e^{2\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{2\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-2\omega t}\}(s) = \frac{1}{s-2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2\omega}\,,$$

und als Endergebnis erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2\omega} + \frac{1}{s+2\omega}\right) - \frac{1}{2s} = \frac{s}{2(s^2-4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}\,.$$

e) Diesmal verwenden wir die Definition der Laplacetransformierten: Es gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^5 \tfrac{1}{5}te^{-st}\,dt + \int_5^\infty (6-t)e^{-st}\,dt\,.$$

Konvergenz liegt offenbar nur für $\mathrm{Re}(s) > 0$ vor. Für solche s liefert partielle Integration

$$\int_0^5 \tfrac{1}{5} t e^{-st}\,dt = \Big(\frac{te^{-st}}{-5s}\Big)\Big|_{t=0}^5 - \int_0^5 \frac{e^{-st}}{-5s}\,dt = \frac{5e^{-5s}}{-5s} - \Big(\frac{e^{-st}}{5s^2}\Big)\Big|_{t=0}^5 = -\frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-5s}-1}{5s^2}\,.$$

Beim zweiten Integral hilft uns die Substitution $\tau = t - 5$ weiter

$$\int_5^\infty (6-t)e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_5^b (6-t)e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b-5} (1-\tau)e^{-s(\tau+5)}\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty (1-\tau)e^{-s(\tau+5)}\,d\tau = e^{-5s}\mathscr{L}\{1-t\}(s) = e^{-5s}\mathscr{L}\{1\}(s) - e^{-5s}\mathscr{L}\{t\}(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s^2}\,.$$

Insgesamt erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \Big(-\frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-5s}-1}{5s^2}\Big) + \Big(\frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s^2}\Big) = \frac{1-6e^{-5s}}{5s^2}\,.$$

f) Mit Hilfe der Verschiebungsregel und des b)-Teils (mit $\omega = 1$) sehen wir für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = e^{-7s}\mathscr{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{e^{-7s}s}{s^2+1}.$$

g) Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt $\mathscr{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Mit $g(t) := e^t\sin(t)$ liefert die Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{\sin(t)\}(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

Wegen $f(t) = (\tau_1 g)(t) = \begin{cases} e^{t-1}\sin(t-1) & t \geqslant 1 \\ 0 & t \in [0,1) \end{cases}$ haben wir nach der Verschiebungsregel

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = e^{-1\cdot s}\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

h) Nach Definition ist

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt\,.$$

Diese Integrale sind für alle $s \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Für $s = 0$ ist

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Im Fall $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f\}(s) &= \int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt \\
&= \Big(\frac{e^{-st}}{-s}t\Big)\Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s}\,dt + \Big(\frac{e^{-st}}{-s}(2-t)\Big)\Big|_{t=1}^2 - \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s}\,dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-s} - \Big(\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big)\Big|_{t=0}^1 + \frac{1}{s}e^{-s} + \Big(\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{s^2}\Big(-e^{-s}+1\Big) + \frac{1}{s^2}\Big(e^{-2s}-e^{-s}\Big) \\
&= \frac{1}{s^2}\Big(e^{-2s}-2e^{-s}+1\Big) = \frac{1}{s^2}\Big(e^{-s}-1\Big)^2.
\end{aligned}$$

i) Für $\mathrm{Re}(s) > a$ gilt nach der Dämpfungsregel und der Bemerkung a) im b)-Teil

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{\sin(bt)\}(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,.$$

Aufgabe 4

a) Für $f(t) := e^{at}$ ergibt sich $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$.

b) Wir definieren zunächst $g(t) := e^{-2t}$. Dann gilt $\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s+2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -2$. Ist $f(t) := (\tau_3 g)(t) = \begin{cases} e^{-2(t-3)}, & t \geqslant 3 \\ 0, & t \in [0,3) \end{cases}$ gesetzt, dann gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s}\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)\,.$$

c) Aufgrund von $\mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$ und $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ bekommen wir mit Hilfe der Linearität von $\mathscr{L}$ und der Dämpfungsregel

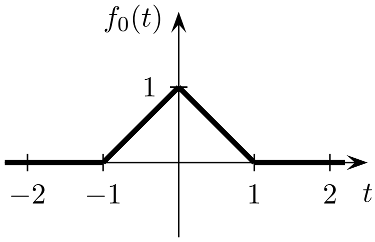
$$\begin{aligned}\frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s+1) + \mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s+1) \\ &= \mathscr{L}\{\cos(2t)+\sin(2t)\}(s+1) = \mathscr{L}\{e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t))\}(s)\,.\end{aligned}$$

Demnach gilt $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$ für $f(t) := e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t))$.

Aufgabe 5

a) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $t_0 = 0$ und überlegen uns den allgemeinen Fall anschließend.

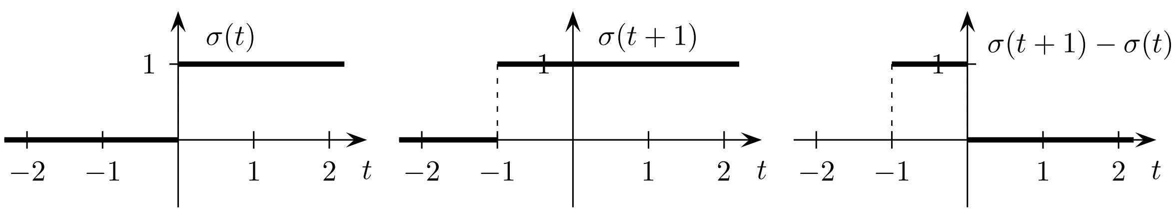
Die zu $t_0 = 0$ gehörige Funktion bezeichnen wir durch f_0. Es ist also



Hieraus kann man sofort

$$f_0(t) = \begin{cases} 1+t & t \in [-1,0) \\ 1-t & t \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ablesen. Diese Fallunterscheidung wollen wir mit Hilfe des Einheitssprungs σ ausdrücken. Wie man sich anhand der Graphen



leicht überlegt, gilt

$$\sigma(t+1) - \sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Analog erhält man

$$\sigma(t) - \sigma(t-1) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Hiermit lässt sich f_0 in dem geschlossenen Ausdruck

$$f_0(t) = \big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big)(1+t) + \big(\sigma(t) - \sigma(t-1)\big)(1-t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

schreiben. Die ursprüngliche Funktion f gewinnen wir durch Verschiebung von f_0 um t_0 zurück. Deshalb folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = f_0(t-t_0) = \big(\sigma(t-t_0+1)-\sigma(t-t_0)\big)(1+t-t_0)+\big(\sigma(t-t_0)-\sigma(t-t_0-1)\big)(1-t+t_0)\,.$$

Ein etwas eleganterer Weg wäre, $f_0(t) = \big(\sigma(t+1)-\sigma(t-1)\big)(1-|t|) = \begin{cases} 1-|t| & t \in [-1,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ zu schreiben und wie eben zu verschieben.

b) Wir haben für alle $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} 2 & t \in [-1,0) \\ 1 & t \in [1,2) \\ 2t-3 & t \in [2,3) \\ -1 & t \in [3,4) \\ 6-t & t \in [4,5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned} g(t) =\,& 2\big(\sigma(t+1)-\sigma(t)\big)+\big(\sigma(t-1)-\sigma(t-2)\big)+(2t-3)\big(\sigma(t-2)-\sigma(t-3)\big) \\ &-\big(\sigma(t-3)-\sigma(t-4)\big)+(6-t)\big(\sigma(t-4)-\sigma(t-5)\big)\,. \end{aligned}$$

c) Zuerst geben wir die Funktion h mit Hilfe des Einheitssprungs σ in einem geschlossenen Ausdruck an. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} h(t) &= 2\big(\sigma(t-1)-\sigma(t-2)\big)+\big(\sigma(t-2)-\sigma(t-3)\big)+3\big(\sigma(t-3)-\sigma(t-4)\big) \\ &\quad -\big(\sigma(t-4)-\sigma(t-6)\big) \\ &= 2\sigma(t-1)-\sigma(t-2)+2\sigma(t-3)-4\sigma(t-4)+\sigma(t-6)\,. \end{aligned}$$

Nach der Verschiebungsregel gilt für jedes $a \geqslant 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{\sigma(t-a)\}(s) = \mathscr{L}\{\tau_a\sigma\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Hiermit ergibt sich aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s}\big(2e^{-s}-e^{-2s}+2e^{-3s}-4e^{-4s}+e^{-6s}\big) \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0\,.$$

Aufgabe 6

Das Polynom $p\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ lässt sich durch $p(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ darstellen mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wie im Beweis von Aufgabe 1 a) gesehen, ist die Funktion $t \mapsto t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes (auch noch so kleine) $\varepsilon > 0$. Daher reicht es, die folgende Aussage nachzuweisen:
Seien $\varepsilon > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Sind die Funktionen $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ und $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung ε, so ist auch $\alpha f + \beta g$ von exponentieller Ordnung ε.
Da f und g von exponentieller Ordnung ε sind, existieren Konstanten $M_f, M_g > 0$ mit

$$|f(t)| \leqslant M_f e^{\varepsilon t} \quad \text{und} \quad |g(t)| \leqslant M_g e^{\varepsilon t} \quad \text{für alle } t \in [0,\infty)\,.$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leqslant |\alpha|\,|f(t)| + |\beta|\,|g(t)| \leqslant \Big(|\alpha| M_f + |\beta| M_g\Big)e^{\varepsilon t} \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty)\,,$$

d.h. $\alpha f + \beta g$ ist von exponentieller Ordnung ε.

Aufgabe 7

Um eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \quad \text{für alle } t \geqslant 0$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$y(t) = t^3 + (y * \sin)(t)$$

und wenden die Faltungsregel 23.9 an. Für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y * \sin\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y\}(s)\,\mathscr{L}\{\sin\}(s)\,.$$

Hieraus folgt wegen $\mathscr{L}\{t^3\}(s) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\mathscr{L}\{\sin\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s^4} + \mathscr{L}\{y\}(s)\frac{1}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{L}\{y\}(s)\Big(1 - \frac{1}{s^2+1}\Big) = \frac{6}{s^4}$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}\,.$$

Schließlich erhalten wir mit $\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \frac{5!}{s^6}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \frac{6}{5!}\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \mathscr{L}\{t^3 + t^5/20\}(s),$$

d.h. $y(t) = t^3 + \frac{1}{20}t^5$, $t \geqslant 0$, löst die gegebene Gleichung.

Aufgabe 8

Sei $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt. Definiere $v := u + \sigma * u$.
Da u und der Einheitssprung σ stückweise stetig und exponentiell beschränkt sind, ist die Faltung $\sigma * u$ und damit auch v stückweise stetig und exponentiell beschränkt. Deshalb existiert $\mathscr{L}\{v\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$. Die Faltungsregel liefert für solche s

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{v\}(s) &= \mathscr{L}\{u\}(s) + \mathscr{L}\{\sigma * u\}(s) = \mathscr{L}\{u\}(s) + \mathscr{L}\{\sigma\}(s)\,\mathscr{L}\{u\}(s)\\ &= \mathscr{L}\{u\}(s) + \frac{1}{s}\,\mathscr{L}\{u\}(s) = \frac{s+1}{s}\,\mathscr{L}\{u\}(s)\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{u\}(s) = \frac{s}{s+1}\,\mathscr{L}\{v\}(s) = \Big(1 - \frac{1}{s+1}\Big)\mathscr{L}\{v\}(s) = \mathscr{L}\{v\}(s) - \frac{1}{s+1}\,\mathscr{L}\{v\}(s).$$

Nach der Dämpfungsregel gilt

$$\frac{1}{s+1} = \mathscr{L}\{\sigma\}(s+1) = \mathscr{L}\{e^{-t}\sigma(t)\}(s).$$

Ist $g(t) = e^{-t}$ für $t \geqslant 0$ gesetzt, dann folgt mit der Faltungsregel

$$\mathscr{L}\{u\}(s) = \mathscr{L}\{v\}(s) - \mathscr{L}\{g\}(s)\,\mathscr{L}\{v\}(s) = \mathscr{L}\{v\}(s) - \mathscr{L}\{g * v\}(s) = \mathscr{L}\{v - g * v\}(s).$$

Also ist $u = v - g * v$, d.h.

$$u(t) = v(t) - (g * v)(t) = v(t) - \int_0^t g(\tau)v(t-\tau)\,d\tau = v(t) - \int_0^t e^{-\tau}v(t-\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant 0.$$