UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
09.07.2009

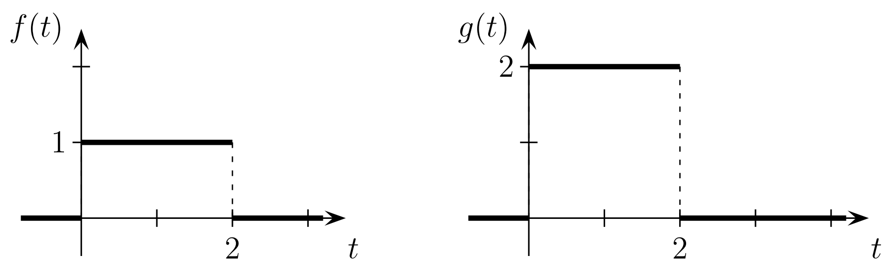
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

12. Übungsblatt

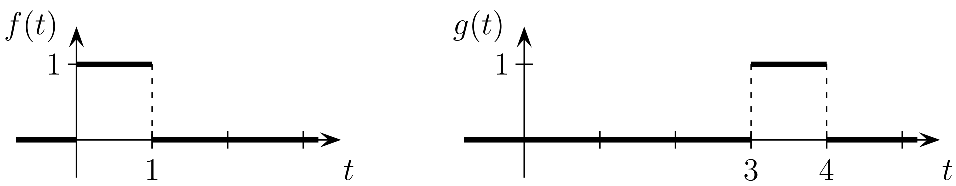
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Faltung $f * g$ der unten angegebenen Funktionen f, g.

a)



b)



c) $f(t) := e^{at}$ und $g(t) := e^{bt}$, $t \geqslant 0$, mit $a, b \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2

Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, periodische Funktion mit der Periode $T > 0$, d.h. $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \geqslant 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt\,.$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

i) $\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}$; **ii)** $\frac{x}{x^3+x^2-x-1}$; **iii)** $\frac{x}{8-x^3}$.

b) Bestimmen Sie einen Ansatz für die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

i) $\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)}$; **ii)** $\frac{1}{x^6-x^2}$.

Aufgabe 4

Ermitteln Sie jeweils eine Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

a) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$; **b)** $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s^2+2s}$;

c) $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{s^3+4s^2}$; **d)** $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+a}{s(s^2+a^2)}$ $(a > 0)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Bestimmen Sie jeweils die Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

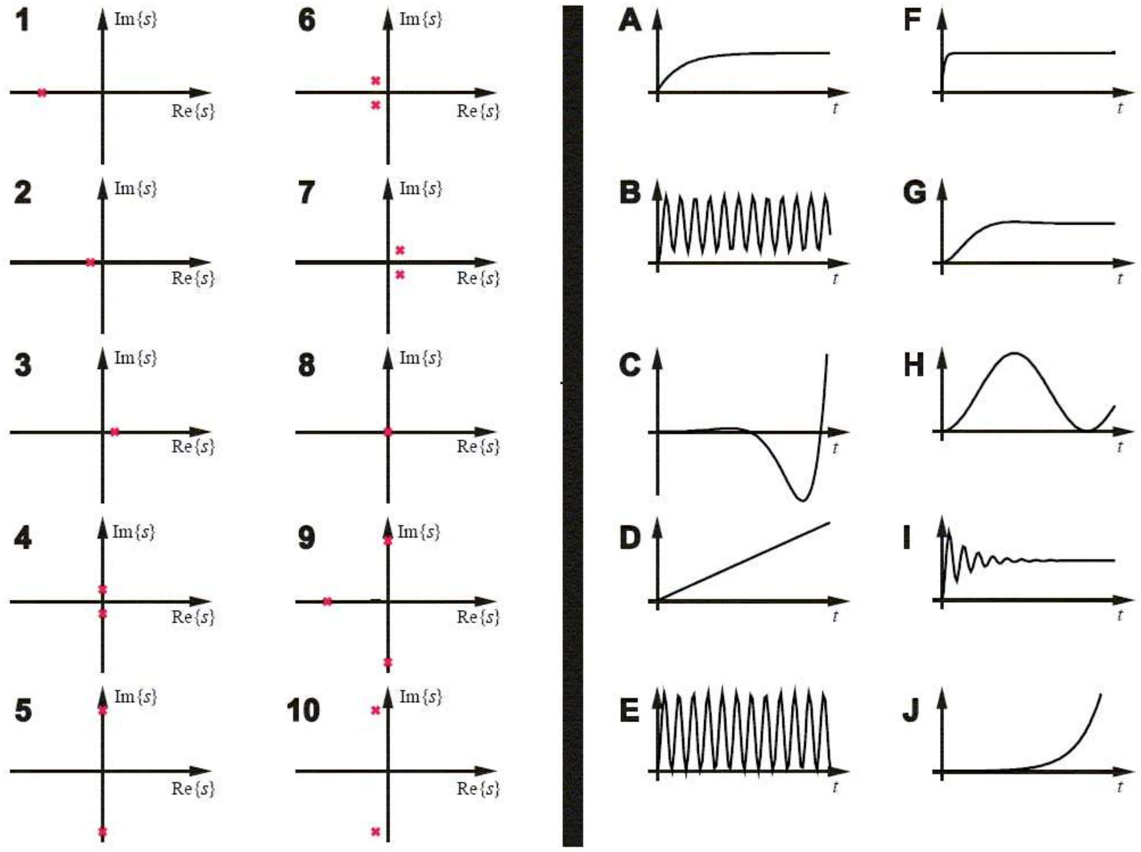
a) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 12\,, \qquad y(0) = 7\,, \quad y'(0) = 1$

b) $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = e^t\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 1$

c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 6te^{-t}\,, \qquad y(0) = 6\,, \quad y(1) = 13/e$

Aufgabe 6

Ordnen Sie den unten abgebildeten Systemen, welche durch ihre Poldiagramme gegeben sind, die passende Sprungantwort zu.



Aufgabe 7

Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ **b)** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{(s+2)(s+1)}{(s^2+1)s}$

c) $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ **d)** $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{\sqrt{s}}$

Aufgabe 8

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wo sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

a) $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$ **b)** $f(x+iy) = \sin x \, \sin y - i \cos x \, \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

c) $f(z) = z \operatorname{Re} z$ **d)** $f(z) = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \quad (\text{für } z \neq 0)$

Hinweis In der großen Übung werden die Aufgaben **1, 6, 7 und 8** besprochen.