UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Den Graphen von f bzw. g entnehmen wir

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,2) \\ 0 & \text{für } t \geqslant 2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [0,2) \\ 0 & \text{für } t \geqslant 2 \end{cases} \qquad (t \geqslant 0).$$

Die Faltung von f und g ist nach Definition gegeben durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Zur Berechnung dieses Integrals unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: Für $t \in [0,2)$ ergibt sich mit der Substitution $r := t - \tau$

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(r)\,dr = \int_0^t 2\,dr = 2t\,.$$

2. Fall: Für $t \in [2,4)$ ergibt sich abermals mit der Substitution $r := t - \tau$

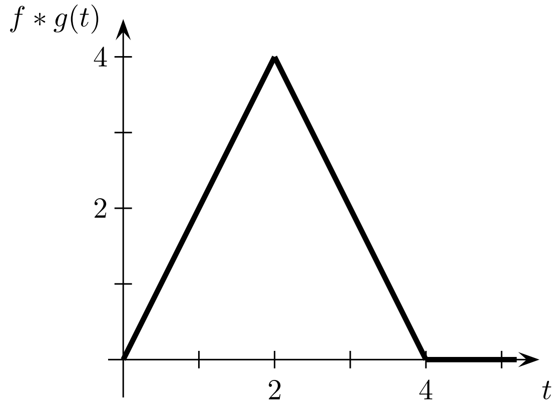
$$(f * g)(t) = \int_0^2 1 \cdot g(t-\tau)\,d\tau = \int_{t-2}^t g(r)\,dr = \int_{t-2}^2 2\,dr = 8 - 2t\,.$$

3. Fall: Für $t \geqslant 4$ ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_0^2 1 \cdot \underbrace{g(t-\tau)}_{=0,\text{ da } t-\tau \geqslant 2}\,d\tau = 0\,.$$

Insgesamt haben wir also

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0,2) \\ 8-2t & \text{für } t \in [2,4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 4 - 2|t-2| & \text{für } t \in [0,4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad t \geqslant 0\,.$$



b) Hier sind

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,1) \\ 0 & \text{für } t \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [3,4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \geqslant 0).$$

Um die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\,, \qquad t \geqslant 0\,,$$

zu berechnen, führen wir wiederum eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: Für $t \in [0,3)$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \underbrace{g(t-\tau)}_{=0,\text{ da } t-\tau \leqslant t < 3} d\tau = 0\,.$$

2. Fall: Für $t \in [3,4)$ ergibt sich mit der Substitution $r := t - \tau$

$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^t g(r)\, dr = \int_3^t 1\, dr = t - 3\,.$$

3. Fall: Für $t \in [4,5)$ ergibt sich erneut mit der Substitution $r := t - \tau$

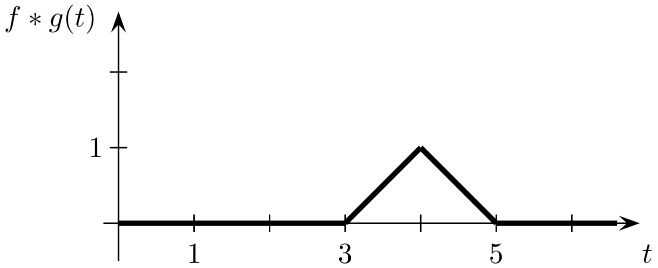
$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^t g(r)\, dr = \int_{t-1}^4 1\, dr = 5 - t\,.$$

4. Fall: Für $t \geqslant 5$ ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot \underbrace{g(t-\tau)}_{=0,\text{ da } t-\tau \geqslant 4} d\tau = 0\,.$$

Zusammenfassend haben wir

$$(f * g)(t) = \begin{cases} t-3 & \text{für } t \in [3,4) \\ 5-t & \text{für } t \in [4,5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 - |t-4| & \text{für } t \in [3,5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad t \geqslant 0\,.$$



c) Es seien $a, b \in \mathbb{C}$. Nach Definition der Faltung ist für $t \geqslant 0$

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)}\, d\tau = e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau}\, d\tau = \begin{cases} te^{at} & \text{für } a = b \\ e^{bt} \big[\frac{1}{a-b}\, e^{(a-b)\tau}\big]_{\tau=0}^t & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} te^{at} & \text{für } a = b \\ \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}) & \text{für } a \neq b \end{cases}.$$

Mit Hilfe der Laplacetransformation lässt sich $f * g$ auch berechnen:

Die Faltungsregel 23.9 liefert für $\operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)\}$

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)\,\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b}\,.$$

Im Fall $a \neq b$ ergibt sich mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f * g\}(s) &= \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b} = \frac{1}{a-b}\Big(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\Big) = \frac{1}{a-b}\Big(\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{bt}\}(s)\Big)\\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a-b}(a^{at} - e^{bt})\Big\}(s)\,,\end{aligned}$$

also

$$(f * g)(t) = \frac{1}{a-b}(a^{at} - e^{bt})\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Im Fall $a = b$ gilt

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \frac{1}{(s-a)^2}\,.$$

Wegen $\mathscr{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$ und der Dämpfungsregel ist in diesem Fall

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \frac{1}{(s-a)^2} = \mathscr{L}\{e^{at}t\}(s)\,,$$

also

$$(f * g)(t) = te^{at}\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Aufgabe 2

Erinnerung an die geometrische Reihe: Sei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| < 1$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{1}{1-\omega}$.
Es seien $T > 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$. Setze $A := \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ sowie $\omega := e^{-sT}$.
Zu zeigen ist also $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-\omega}\,A$.
Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund der T-Periodizität von f

$$\begin{aligned}\int_0^{(N+1)T} e^{-st} f(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{N} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\,dt \overset{r:=t-kT}{=} \sum_{k=0}^{N} \int_0^T e^{-s(r+kT)} \underbrace{f(r+kT)}_{=f(r)}\,dr\\ &= \sum_{k=0}^{N} e^{-skT} \int_0^T e^{-sr} f(r)\,dr = \sum_{k=0}^{N} \omega^k A = A \sum_{k=0}^{N} \omega^k\,.\end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ ergibt sich wegen $|\omega| = e^{-\operatorname{Re}(s)\,T} < 1$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = A \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{A}{1-\omega} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

Aufgabe 3

a) **i)** Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung richtet sich nach den Nullstellen des Nennerpolynoms $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$. Diese sind $-1, 0, 2$. Jede dieser Nullstellen ist einfach. Demzufolge lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}\,.$$

Um die Koeffizienten A, B, C zu ermitteln, haben wir verschiedene Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Wir multiplizieren obige Gleichung mit dem Hauptnenner $x(x+1)(x-2)$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

und setzen die Nullstellen des Nennerpolynoms ein

$$\begin{array}{rrcl} x = 0: & -1 = -2A & \iff & A = 1/2 \\ x = -1: & -1 = 3B & \iff & B = -1/3 \\ x = 2: & 5 = 6C & \iff & C = 5/6 \end{array}$$

2. Möglichkeit: Um A, den Koeffizienten des zur Nullstelle $\lambda = 0$ gehörenden Terms $\frac{1}{x}$, zu ermitteln, multipliziert man $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}$ mit $x - \lambda = x$ und bildet dann den Grenzwert $x \to \lambda$, also $x \to 0$. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} \cdot x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}\,.$$

Entsprechend kann man für B und C verfahren

$$B = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x+1)\right) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-1}{x(x-2)} = -\frac{1}{3}\,,$$
$$C = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x-2)\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}\,.$$

Mit den Koeffizienten $A = 1/2$, $B = -1/3$ sowie $C = 5/6$ ergibt sich

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}\,.$$

ii) Wiederum müssen zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt werden. Durch “scharfes Hinsehen” erkennen wir, dass -1 eine solche ist. Polynomdivision liefert $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2-1)(x+1)$, und wegen $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ ergibt sich

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2\,.$$

Damit ist 1 eine einfache Nullstelle und -1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}\,.$$

Nach Multiplikation mit $(x-1)(x+1)^2$ ist

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1) = A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)\,.$$

Setzen wir die Nullstellen -1 und 1 hierin ein, erhalten wir

$$\begin{array}{rrcl} x = -1: & -1 = -2C & \iff & C = 1/2 \\ x = 1: & 1 = 4A & \iff & A = 1/4 \end{array}$$

Um B zu bestimmen, können wir einen beliebigen anderen Wert für x einsetzen. Wir wählen $x = 0$, weil dann die linke Seite der Gleichung verschwindet:

$$0 = A - B - C = \frac{1}{4} - B - \frac{1}{2} \quad\iff\quad B = -\frac{1}{4}\,.$$

Alternativ könnten wir zur Bestimmung von A, B, C auch einen Koeffizientenvergleich durchführen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt

$$\begin{array}{rl} x^2: & 0 = A + B \\ x: & 1 = 2A + \phantom{B - {}} C \\ 1: & 0 = A - B - C \end{array}$$

beziehungsweise geschrieben als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

Jedenfalls liefern beide Alternativen $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 1/2$. Folglich ist

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

iii) Offenbar ist $x = 2$ eine Nullstelle des Nennerpolynoms $8 - x^3$. Mit Hilfe der Polynomdivision $(-x^3 + 8) : (x - 2)$ sehen wir

$$8 - x^3 = -(x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Das Polynom $x^2 + 2x + 4$ hat die beiden nichtreellen Nullstellen $-1 + \sqrt{3}i$ und $-1 - \sqrt{3}i$. Damit lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{8 - x^3} = \frac{-x}{(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-(-1+\sqrt{3}i)} + \frac{C}{x-(-1-\sqrt{3}i)}.$$

(In der Notation aus Abschnitt 23.11 der Vorlesung ausgedrückt, liegt die folgende Situation vor: $P(x) = -x$, $Q(x) = x^3 - 8$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3}i$ und $\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ sowie $\alpha_1^{(1)} = A$, $\alpha_1^{(2)} = B$ und $\alpha_1^{(3)} = C$.)
Nun müssen wir die Koeffizienten A, B, C bestimmen. Hierzu multiplizieren wir obige Gleichung mit dem Hauptnenner $(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))$ durch

$$-x = A(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i)) + B(x-2)(x-(-1-\sqrt{3}i)) + C(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i)).$$

Nun setzen wir für x die Nullstellen des Nennerpolynoms ein und erhalten

$$\begin{aligned} x = 2: &\quad -2 = A(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i) = 12A, \\ x = -1+\sqrt{3}i: &\quad 1-\sqrt{3}i = B(-3+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i) = -6B(1+\sqrt{3}i), \\ x = -1-\sqrt{3}i: &\quad 1+\sqrt{3}i = C(-3-\sqrt{3}i)(-2\sqrt{3}i) = -6C(1-\sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} A &= -1/6, \\ B &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1+3} = \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}i, \\ C &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1+3} = \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i. \end{aligned}$$

Als Endergebnis für die komplexe Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{x}{8-x^3} = -\frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}i}{x-(-1+\sqrt{3}i)} + \frac{\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i}{x-(-1-\sqrt{3}i)}.$$

Reelle Partialbruchzerlegung: Wie oben gesehen, besitzt das Polynom $x^2 + 2x + 4$ keine reelle Nullstelle. Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{8-x^3} = \frac{-x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{\widetilde{B}x + \widetilde{C}}{x^2+2x+4}.$$

Beispielsweise nach Multiplikation mit $(x-2)(x^2+2x+4)$ durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen beliebiger Werte für x ergibt sich

$$A = -1/6, \qquad \widetilde{B} = 1/6, \qquad \widetilde{C} = -1/3.$$

Insgesamt haben wir

$$\frac{x}{8-x^3} = \frac{-x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = -\frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}.$$

b) **i)** Wegen $(x+1)^2(x^3+1) = (x+1)^3(x^2-x+1) = (x+1)^3(x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2})$ sind -1 eine dreifache Nullstelle und $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ jeweils eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms. Deshalb lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}} + \frac{E}{x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}}\,.$$

(In der Notation von Abschnitt 23.11 geschrieben: $P(x) = 1$, $Q(x) = (x+1)^2(x^3+1)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$, $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 1$ sowie $\alpha_1^{(1)} = A$, $\alpha_2^{(1)} = B$ $\alpha_3^{(1)} = C$, $\alpha_1^{(2)} = D$ und $\alpha_1^{(3)} = E$.) Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{9}$, $E = -\frac{1}{9}$. Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{\widetilde{D}x+\widetilde{E}}{x^2-x+1}\,.$$

Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $\widetilde{D} = -\frac{2}{9}$, $\widetilde{E} = \frac{1}{9}$.

ii) Es gilt: $x^6 - x^2 = x^2(x^4-1) = x^2(x^2-1)(x^2+1) = x^2(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$. Also ist 0 eine doppelte Nullstelle, während die Nullstellen $1, -1, i, -i$ jeweils einfach sind. Der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{x^6-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x-i} + \frac{F}{x+i}\,.$$

Ergebnis: $A = 0$, $B = -1$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{4}i$, $F = \frac{1}{4}i$.
Für die reelle Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{1}{x^6-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{\widetilde{E}x+\widetilde{F}}{x^2+1}\,.$$

Ergebnis: $A = 0$, $B = -1$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, $\widetilde{E} = \frac{1}{2}$, $\widetilde{F} = 0$.

Aufgabe 4

a) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\Big)\,.$$

Wegen $\mathscr{L}\{e^{1\cdot t}\}(s) = \frac{1}{s-1}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\mathscr{L}\{e^{(-1)\cdot t}\}(s) = \frac{1}{s+1}$ für $\mathrm{Re}(s) > -1$ erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{1\cdot t}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{(-1)\cdot t}\}(s)\Big) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\Big\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\sinh(t)\Big\}(s)\,.$$

Alternativ: Nach der Faltungsregel gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{s+1} = \mathscr{L}\{e^t\}(s)\,\mathscr{L}\{e^{-t}\}(s) = \mathscr{L}\{g_1\}(s)\,\mathscr{L}\{g_2\}(s) = \mathscr{L}\{g_1 * g_2\}(s)$$

wobei $g_1(t) := e^t$ und $g_2(t) := e^{-t}$ gesetzt seien. Also fanden wir mit der Faltung $g_1 * g_2$ eine Funktion mit $\mathscr{L}\{g_1 * g_2\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$. Nun müssen wir noch $g_1 * g_2$ berechnen. Für $t \geqslant 0$ ist

$$\begin{aligned}(g_1 * g_2)(t) &= \int_0^t g_1(t-u)g_2(u)\,du = \int_0^t e^{t-u}e^{-u}\,du = e^t\int_0^t e^{-2u}\,du\\ &= e^t\Big(-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big)\Big|_{u=0}^{t} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t)\,.\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

erkennen wir für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-2t}\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\Big\}(s)\,.$$

Alternativ: Wir können den b)-Teil auch lösen, indem wir die Dämpfungsregel auf das Resultat des a)-Teils anwenden. Es gilt nämlich für alle $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{(s+1)^2-1} &\overset{\textbf{a)}}{=} \mathscr{L}\big\{\sinh(t)\big\}(s+1) = \mathscr{L}\big\{e^{-1\cdot t}\sinh(t)\big\}(s)\\ &= \mathscr{L}\Big\{e^{-1\cdot t}\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\Big\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

c) Der Ansatz

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2} = \frac{s+3}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}$$

führt auf

$$A = \frac{1}{16}\,,\quad B = \frac{3}{4}\,,\quad C = -\frac{1}{16}\,.$$

Damit gilt für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{s+3}{s^3+4s^2} &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s+4} = \frac{1}{16}\mathscr{L}\{1\}(s) + \frac{3}{4}\mathscr{L}\{t\}(s) - \frac{1}{16}\mathscr{L}\{e^{-4t}\}(s)\\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}e^{-4t}\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

d) Es sei $a > 0$ fest gewählt. Hier hilft uns reelle Partialbruchzerlegung weiter:

$$\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+a^2}\,.$$

Hieraus schließen wir

$$A = \frac{1}{a}\,,\quad B = -\frac{1}{a}\,,\quad C = 1$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} + \frac{-s/a+1}{s^2+a^2}\\ &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\cdot\frac{s}{s^2+a^2} + \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\,.\end{aligned}$$

Nun erinnern wir uns an

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos(at)\}(s) &= \frac{s}{s^2+a^2} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)\,,\\ \mathscr{L}\{\sin(at)\}(s) &= \frac{a}{s^2+a^2} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)\end{aligned}$$

und erhalten schließlich für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1}{a}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1}{a}\mathscr{L}\{\cos(at)\}(s) + \frac{1}{a}\mathscr{L}\{\sin(at)\}(s)\\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a}\big(1-\cos(at)+\sin(at)\big)\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

Komplexe Partialbruchzerlegung führt natürlich auch zum Ziel. Hier lautet der Ansatz

$$\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} = \frac{s+a}{s(s-ia)(s+ia)} = \frac{A}{s} + \frac{\widetilde{B}}{s-ia} + \frac{\widetilde{C}}{s+ia}$$

bzw.

$$s+a = A(s-ia)(s+ia) + \widetilde{B}s(s+ia) + \widetilde{C}s(s-ia)\,.$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms liefert

$$\begin{array}{rrcl} s=0: & a = & Aa^2 & \iff \quad A = 1/a\,, \\ s=ia: & ia+a = & -2\widetilde{B}a^2 & \iff \quad \widetilde{B} = -\frac{1+i}{2a}\,, \\ s=-ia: & -ia+a = & -2\widetilde{C}a^2 & \iff \quad \widetilde{C} = -\frac{1-i}{2a}\,. \end{array}$$

Demzufolge ist für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1/a}{s} - \frac{1+i}{2a}\frac{1}{s-ia} - \frac{1-i}{2a}\frac{1}{s+ia} \\ &= \frac{1}{a}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1+i}{2a}\mathscr{L}\{e^{iat}\}(s) - \frac{1-i}{2a}\mathscr{L}\{e^{-iat}\}(s) \\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a} - \frac{1+i}{2a}e^{iat} - \frac{1-i}{2a}e^{-iat}\Big\}(s) \\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a}\big(1 - \frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat}) + \frac{1}{2i}(e^{iat}-e^{-iat})\big)\Big\}(s) \\ &= \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{a}\big(1-\cos(at)+\sin(at)\big)\Big\}(s)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Aus der Vorlesung kennen wir die Identität

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathscr{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

für eine exponentiell beschränkte, n-mal stetig differenzierbare Funktion f und hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$. Insbesondere haben wir also

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)\,.$$

Für die Lösung y mit den Anfangswerten $y(0) = 7$ und $y'(0) = 1$ bedeutet dies

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 7 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 7s - 1\,.$$

Somit ergibt sich für die Lösung y des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{12}{s} &= \mathscr{L}\{12\}(s) = \mathscr{L}\{y''+4y'+3y\}(s) = (s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 7s - 1) + 4(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 7) + 3\,\mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2+4s+3)\mathscr{L}\{y\}(s) - 7s - 29\,, \end{aligned}$$

also

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}\left(7s+29+\frac{12}{s}\right) = \frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)}\,.$$

Nun wollen wir eine Partialbruchzerlegung durchführen; wir machen den Ansatz

$$\frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s und setzen $s = 0$ ein, so folgt $A = \frac{12}{3} = 4$. Multiplikation mit $s+1$ und Einsetzen von $s = -1$ liefert $B = \frac{-10}{-2} = 5$, und ganz analog erhält man schließlich noch $C = \frac{-12}{6} = -2$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3} = \mathscr{L}\{4\}(s) + \mathscr{L}\{5e^{-t}\}(s) - \mathscr{L}\{2e^{-3t}\}(s) \\ &= \mathscr{L}\big\{4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\big\}(s)\,,\end{aligned}$$

und wir haben die Lösung y gefunden: Es ist

$$y(t) = 4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}.$$

b) Wegen $y(0) = y'(0) = 0$ erhält man hier $\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s)$ und $\mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s)$ für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$, und mit $y''(0) = 1$ ergibt sich

$$\mathscr{L}\{y'''\}(s) = s^3\mathscr{L}\{y\}(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3\mathscr{L}\{y\}(s) - 1\,.$$

Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1} &= \mathscr{L}\{e^t\}(s) = \mathscr{L}\{y''' - 3y'' + 3y' - y\}(s) \\ &= (s^3\mathscr{L}\{y\}(s) - 1) - 3s^2\mathscr{L}\{y\}(s) + 3s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - \mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)\mathscr{L}\{y\}(s) - 1 = (s-1)^3\mathscr{L}\{y\}(s) - 1\,,\end{aligned}$$

und dies führt auf

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(s-1)^3}\Big(1 + \frac{1}{s-1}\Big) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt bekanntlich

$$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)\,,$$

und mit der Dämpfungsregel folgt

$$\frac{1}{(s-1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{t^n\}(s-1) = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{e^tt^n\}(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)\,.$$

Hiermit bekommen wir

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\{e^tt^2\}(s) + \frac{1}{6}\,\mathscr{L}\{e^tt^3\}(s) = \mathscr{L}\big\{e^t(t^2/2 + t^3/6)\big\}(s)\,,$$

d.h. die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = e^t(t^2/2 + t^3/6)\,.$$

c) Man erhält mit $c := y'(0)$ für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 6 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{6}{(s+1)^2} &= \mathscr{L}\{6te^{-t}\}(s) = \mathscr{L}\{y'' + 2y' + y\}(s) \\ &= (s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c) + 2(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 6) + \mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2 + 2s + 1)\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c - 12\,.\end{aligned}$$

Für die Lösung y der Differentialgleichung mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = c$ hat man also

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}\left(6s + c + 12 + \frac{6}{(s+1)^2}\right) = \frac{6(s+1)+c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}$$
$$= \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}\,.$$

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\mathscr{L}\{t^n\}(s+1) = \frac{1}{n!}\mathscr{L}\{e^{-t}t^n\}(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > -1, n \in \mathbb{N}_0)$$

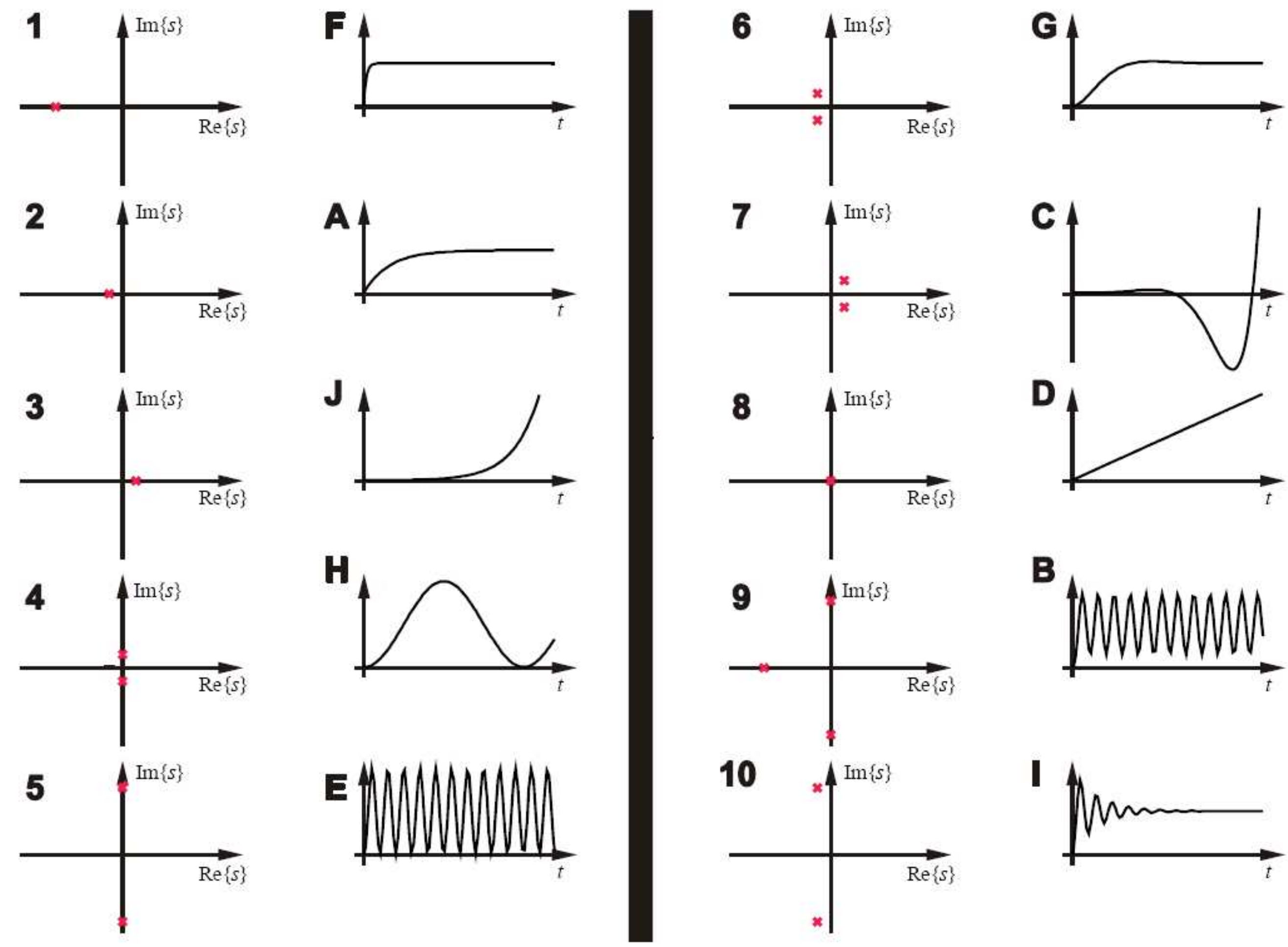
schließt man

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} = \mathscr{L}\big\{6e^{-t} + (c+6)te^{-t} + t^3e^{-t}\big\}(s)\,,$$

d.h. es ist $y(t) = (6 + (c+6)t + t^3)e^{-t}$. Bei dieser Funktion gilt $y(1) = (13+c)e^{-1}$, und für $c = 0$ wird die Bedingung $y(1) = 13/e$ erfüllt. Die Lösung des Problems ist demzufolge

$$y(t) = (6 + 6t + t^3)e^{-t}\,.$$

Aufgabe 6



Folie aus der Übung zur Sprungantwort

Das Verhalten eines Systems sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y & = & f(t), \quad t \geq 0, \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},\, y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, & \ldots & , y'(0) = y_1,\, y(0) = y_0 \end{array}\right. , \tag{S}$$

wobei $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Die *Sprungantwort* h des Systems ist die Lösung y von (S) mit $f(t) = \sigma(t)$ (Einheitssprung) sowie den Anfangswerten $y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0$.

Wende $\mathscr{L}$ auf (S) an [mit $f = \sigma$]. Dann gilt für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$

$$a_n \mathscr{L}\{y^{(n)}\}(s) + a_{n-1}\mathscr{L}\{y^{(n-1)}\}(s) + \ldots + a_1 \mathscr{L}\{y'\}(s) + a_0 \mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{\sigma\}(s)\,. \tag{1}$$

Benutze für $k = 1, \ldots, n$

$$\mathscr{L}\{y^{(k)}\}(s) = s^k \mathscr{L}\{y\}(s) - s^{k-1} y(0) - s^{k-2} y'(0) - \ldots - y^{(k-1)}(0) = s^k \mathscr{L}\{y\}(s)\,,$$

weil $y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0$ sind. Hieraus folgt mit (1)

$$\big(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\big) \mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \underbrace{\frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}_{=:G(s)} \cdot \frac{1}{s}\,.$$

Die Polstellen von G (also die Nullstellen von $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$) sind im sog. Poldiagramm dargestellt.
Welche Aussage lässt sich bei Kenntnis der Polstellen von G über die Sprungantwort treffen?
<u>Vereinfachende Annahmen:</u> $n = 2$ und die Polstellen von G seien verschieden.
Bezeichne die beiden Polstellen von G durch λ_1, λ_2.
$\rightarrow$ komplexe Partialbruchzerlegung
1. Fall: G hat nur reelle Polstellen $\neq 0$.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2} + \frac{C}{s} = \mathscr{L}\{A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + C\}(s)\,.$$

2. Fall: G hat nur reelle Polstellen, eine davon ist Null, etwa $\lambda_2 = 0$.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} = \mathscr{L}\{A e^{\lambda_1 t} + B + Ct\}(s)\,.$$

3. Fall: G hat eine nicht-reelle Polstelle, etwa $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Wegen $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ist dann auch $\overline{\lambda_1}$ eine Polstelle von G, und es gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{\overline{A}}{s - \overline{\lambda_1}} + \frac{C}{s} = \mathscr{L}\{A e^{\lambda_1 t} + \overline{A} e^{\overline{\lambda_1} t} + C\}(s)\,.$$

In diesem Fall ergibt sich eine Schwingung:

$$\begin{aligned} A e^{\lambda_1 t} + \overline{A} e^{\overline{\lambda_1} t} &= |A| e^{\mathrm{Re}(\lambda_1) t} \Big[e^{i(\arg(A) + \mathrm{Im}(\lambda_1) t)} + e^{-i(\arg(A) + \mathrm{Im}(\lambda_1) t)} \Big] \\ &= \underbrace{2|A| e^{\mathrm{Re}(\lambda_1) t}}_{\text{Amplitute}} \cos\big(\arg(A) + \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda_1)}_{\text{Frequenz}}\ t\big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Da die gebrochenrationale Funktion $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)$ die einfachen Polstellen $-2, -1, 0$ besitzt, ist $f(t)$ eine Linearkombination von e^{-2t}, e^{-t}, $e^{0t} = 1$. Hieraus folgt, dass f stückweise stetig ist und dass $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ existiert. Der Endwertsatz liefert

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Nach einer Partialbruchzerlegung von $\frac{(s+2)(s+1)}{(s^2+1)s}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)$ sehen wir, dass $f(t)$ eine Linearkombination von e^{it}, e^{-it}, 1 (komplexe PBZ) bzw. von $\sin t$, $\cos t$, 1 (reelle PBZ) ist. Deshalb existiert $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ nicht.

c) Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung von $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ und der inversen Laplacetransformation erkennen wir, dass die Funktion f mit $f(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt ist. Mit dem Anfangswertsatz schließen wir

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)} = \lim_{s\to\infty} \frac{1+1/s^2}{1+3/s+2/s^2} = 1\,.$$

d) Wir zeigen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ nicht existiert. Würde nämlich $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ existieren, dann müsste nach dem Anfangswertsatz

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s\to\infty} 2\sqrt{s} < \infty$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch! Demzufolge existiert $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ nicht.

Aufgabe 8

a) Da die Exponentialfunktion exp und $z \mapsto -z^{-4}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph sind, ist f als Verkettung holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph, also auch komplex differenzierbar. (Dort sind folglich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) erfüllt.) Nach der Kettenregel gilt

$$f'(z) = e^{-1/z^4}(4z^{-5}) = \frac{4e^{-1/z^4}}{z^5} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Nun zum Punkt $z_0 = 0$: Die Funktion f ist in 0 nicht einmal stetig, denn

$$f(re^{i\pi/4}) = e^{-e^{-i\pi}/r^4} = e^{1/r^4} \xrightarrow{r\to 0} \infty\,.$$

Folglich ist f in $z_0 = 0$ nicht komplex differenzierbar und damit erst recht nicht holomorph.

b) Die Funktionen $u(x,y) := \sin x\,\sin y$ und $v(x,y) := -\cos x\,\cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos x\,\sin y\,, & u_y(x,y) &= \sin x\,\cos y\,,\\ v_x(x,y) &= \sin x\,\cos y\,, & v_y(x,y) &= \cos x\,\sin y\,. \end{aligned}$$

Wir prüfen die CRD nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y = -v_x$ gilt genau dann, wenn $\sin x\,\cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m+\frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist f komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m+\tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\big\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x+iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \cos x\,\sin y + i\underbrace{\sin x\,\cos y}_{=0,\text{ da } z\in M} = \cos x\,\sin y\,.$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x\,, \qquad u_y(x,y) = 0\,, \qquad v_x(x,y) = y\,, \qquad v_y(x,y) = x\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0\,, \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = -y \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgendwo holomorph.

d) Hier ist $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f(x+iy) = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Wir definieren $u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$, sowie $v\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 0$. Dann erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x,y)\,.$$

Offenbar sind u und v auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$u_x(x,y) = \frac{4x(x^2+y^2) - (2x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und genauso

$$u_y(x,y) = \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

außerdem gilt

$$v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0\,.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0\,,$$

also wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Die Funktion f ist somit auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0\,.$$

Da $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} z = 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z = 0\}$ nicht offen ist, liegt Holomorphie nirgends vor.